1. Körper, die mit Kräften aufeinander wirken.

Wenn N Körper mit den Massen m_i, $i = 1, \ldots, N$ sich and den Orten $\vec{x}_i$ mit den Geschwindigkeiten $\vec{v}_i$ befinden und mit Ortsabhängigen Kräften $\vec{F}_i(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N)$ aufeinander wirken, so wird nach den Newton'schen Gesetzen deren Bewegung durch folgendes System von Differentialgleichungen beschrieben:

$$\frac{d}{dt}\vec{x}_i = \vec{v}_i \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{v}_u = \frac{1}{m_i}\vec{F}_i(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N) \tag{2}$$

Im Fall Newton'scher Gravitation ist

$$\vec{F}_i(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N) = \sum_{j \neq i} G m_i m_j \frac{\vec{x}_j - \vec{x}_i}{\|\vec{x}_j - \vec{x}_i\|^3} \tag{3}$$

In SI-Einheiten ist $G = 6,672 \cdot 10^{-11} \left[\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}}\right]$.

Bemerkung: Die Kräfte können auch von der Zeit abhängen (bei zusätzlichen zeitlich veränderlichen Kraftfeldern) odervon der Geschwindigkeit der Körper (z.B. für geladene Körper in einem Magnetfeld).

2. Skalieren

Wählen wir zunächst SI-Einheiten und stellen die Gleichungen (2),(2) und (3) für die jeweiligen Maßzahlen (bzw. Vektoren von Maßzahlen) von $\vec{x}_i$ und $\vec{v}_i$ auf.

Da die physikalischen Einheiten beliebig sind, kann man durch andere Wahl der Einheiten die Gleichungen umskalieren. Wählen wir etwas für eine Simulation des Sonnensystems als Längeneinheit $S = a$ [m] (etwa mit

$a = 1.5 \cdot 10^8$, der mittlere Erde-Sonne-Abstand beträgt $S = 1.5 \cdot 10^1 1\mathrm{m}$), so gilt für die neuen Maßzahlen $\vec{x}_i^{(s)}$ und $\vec{v}_i^{(s)}$.

$$\vec{x}_i^{(s)}[\mathrm{S}] = a^{-1}\vec{x}_i[\mathrm{m}]\ , \qquad \vec{v}_i^{(s)}\left[\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{s}}\right] = a^{-1}\vec{v}_i\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right] \tag{4}$$

Die Gleichungen (1),(2) gelten selbstverständlich weiter, man muss aber eine skalierte Version des Kraftgesetzes herleiten, etwa für das Gravitationsgesetz (3):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\vec{v}_i^{(s)} &= \frac{d}{dt}a^{-1}\vec{v}_u \\
&= \frac{1}{m_i}a^{-1}\sum_{j\neq i} Gm_i m_j \frac{\vec{x}_j - \vec{x}_i}{\|\vec{x}_j - \vec{x}_i\|^3} \\
&= a^{-1}\sum_{j\neq i} Gm_j \frac{a(\vec{x}_j^{(s)} - \vec{x}_i^{(s)})}{a^3\|\vec{x}_j^{(s)} - \vec{x}_i^{(s)}\|^3} \\
&= a^{-3}G\sum_{j\neq i} m_j \frac{\vec{x}_j - \vec{x}_i}{\|\vec{x}_j - \vec{x}_i\|^3}\ .
\end{aligned}$$

Man erhält also die selbe Form des Gravitationsgesetzes, die Gravitationskonstante in den neuen Einheiten ist jedoch $a^{-3}6,672 \cdot 10^{-11}\left[\frac{S^3}{kg}\right]$. Lässt man auf den neuen Koordinaten eine Simulation des Sonnensystems beruhen, so kann man die tatsächlichen Massen und Zeiteinheiten verwenden, die Abstände wären aber auf die Einheit des mittleren Abstandes Erde-Sonne bezogen.

3. Numerische Lösung

Die einfachste Art, ein solches Gleichungssystem näherungsweise zu lösen, ist ein so genanntes **Euler-Verfahren**. Gegeben seien Startwerte $\vec{x}_i(0)$, $\vec{v}_i(0)$. Wir berechnen nun Näherungswerte zu Zeitpunkten $n\Delta t$, wobei $\Delta t > 0$ gerade der „Zeitschritt" unseres Verfahrens ist.

$$\vec{x}_i((n+1)\Delta t) = \vec{x}_i(n\Delta t) + \Delta t \vec{v}_i \tag{5}$$

$$\vec{v}_i((n+1)\Delta t) = \vec{v}_i(n\Delta t) + \Delta t \frac{1}{m_i} \vec{F}_i(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N) \tag{6}$$

Es gibt aber viel bessere Verfahren. Beim Euler-Verfahren geht man in jedem Zeitschritt gerade in Richtung der Momentangeschwindigkeit, klüger wäre es natürlich, bei jedem Schritt einer gekrümmten Linie zu folgen, die der wahren Trajektorie möglichst nahe kommt.

Betrachten wir ein einfaches Beispiel, um etwas über die Genauigkeit des Euler-Verfahrens auszusagen:

Aufgabe: Versuchen Sie, wenn Ihre Simulationen mit dem Euler-Verfahren funktionieren, ein **explizites Runge-Kutta-Verfahren** umzusetzen. Dieses ist wesentlich genauer (im Verhältnis zum Rechenaufwand).