TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN

Fakultät V – Verkehrs- und Maschinensysteme - Institut für Mechanik

FG Systemdynamik
und Reibungsphysik

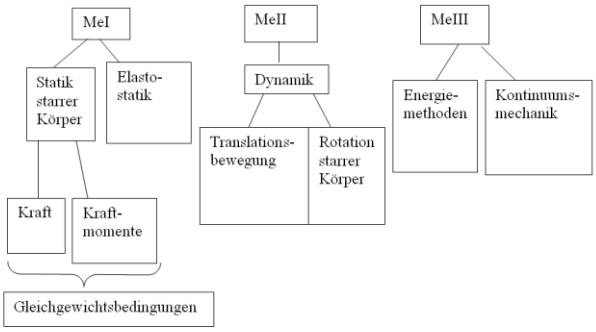
Prof. Dr. rer. nat. V. Popov
www.friction-physics.de

Statik und elementare Festigkeitslehre (Mechanik I)

Vorlesungsnotizen WiSe 2020/21

Vektoren, Vektoralgebra, Skalarprodukt.
Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt, Kräftegleichgewicht.

I. Übersicht der Mechanik-Kurse



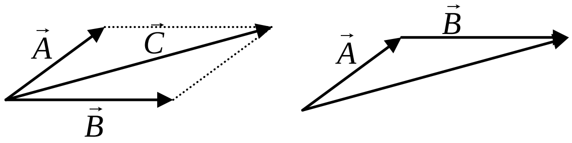
II. Skalare und Vektoren

Skalare: Temperatur, Masse, Anzahl der Gegenstände, Länge,...
Vektoren: Verschiebung, Kraft, Impuls, Geschwindigkeit, Beschleunigung,...

Bezeichnungen: $\mathbf{A}$, $\vec{A}$, $\vec{A}$, $\underline{A}$ oder einfach A

Betrag: $A = |\vec{A}| = |\mathbf{A}|$.

III. Summe von Vektoren $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$

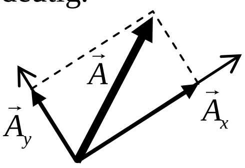


Vertauschbarkeit: $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$.

Multiplikation mit einer Zahl:

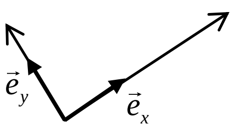
$$\vec{C} = \alpha \vec{A} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{C}| = \alpha |\vec{A}| \\ \text{dieselbe Richtung} \end{cases}$$

Zerlegung eines Vektors:
Jeder Vektor kann als Summe anderer Vektoren dargestellt werden. Diese Zerlegung wird durch die Wahl von Referenzrichtungen eindeutig.



$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$

$$= A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$$

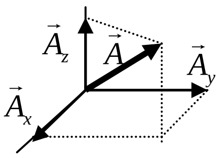


$|\vec{e}_x| = 1$, $|\vec{e}_y| = 1$.

$\vec{A}_x = A_x \vec{e}_x$, $\quad \vec{A}_y = A_y \vec{e}_y$.

Koordinaten (oder Komponenten) des Vektors

In drei Dimensionen:



$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z$$

$$= \begin{pmatrix} A_x & A_y & A_z \end{pmatrix}$$

Summe von Vektoren in Komponenten:

$$\vec{A} + \vec{B} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y$$

$$= (A_x + B_x)\vec{e}_x + (A_y + B_y)\vec{e}_y = \begin{pmatrix} A_x + B_x \\ A_y + B_y \end{pmatrix}$$

IV. Vektorielle Gleichungen

Was bedeutet die Gleichung $\vec{A} = \vec{B}$?

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} A_x = B_x \\ A_y = B_y \end{matrix}.$$

Was bedeutet die Gleichung $\vec{A} + \vec{B} = \vec{0}$?

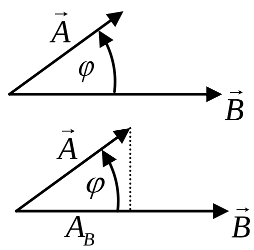
$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} A_x + B_x = 0 \\ A_y + B_y = 0 \end{matrix}.$$

Das Vektorzeichen beim Nullvektor wird oft weggelassen. Unter einer Null in einer Vektorgleichung wird immer ein Nullvektor verstanden.

V. Produkte aus zwei Vektoren.

Es gibt drei Arten von Produkten, die sich nach dem Charakter des *Ergebnisses* unterscheiden.
Skalarprodukt (Ergebnis ist ein Skalar): Arbeit, Leistung.
Vektorprodukt (oder Kreuzprodukt) (Ergebnis ist ein Vektor): Magnetische Kraft, Kraftmoment, Drehimpuls.
Tensorprodukt (oder diadisches Produkt) (Ergebnis ist ein Tensor): Trägheitsmoment u.a.

Definition des Skalarproduktes von zwei Vektoren $\vec{A}$ und $\vec{B}$:



$$\boxed{\vec{A} \cdot \vec{B} \equiv AB\cos\varphi}$$

Englische Bezeichnung: dot product

$A_B = A\cos\varphi$.

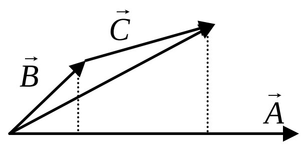
$\vec{A} \cdot \vec{B} = BA_B$

$= BA\cos\varphi = AB_A$

Eigenschaften des Skalarproduktes:

1) $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

2) $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$



$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C})$$

$$= A(\vec{B} + \vec{C})_A =$$

$= A(B_A + C_A) = AB_A + AC_A$

$= \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$

3) $\vec{A} \perp \vec{B} \;\Rightarrow\; \vec{A}\cdot\vec{B} = 0$

4) $\vec{A}\cdot\vec{A} = A^2$

VI. Skalarprodukt in Komponenten

Zwei Vektoren seien durch ihre kartesischen Komponenten gegeben:

$\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z$,

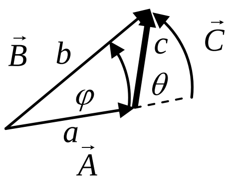
$\vec{B} = B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y + B_z\vec{e}_z$.

$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}$.

Für zwei gleiche Vektoren:

$\boxed{A^2 = A_x^{\,2} + A_y^{\,2} + A_z^{\,2}}$ (Satz des Pythagoras)

B1. In einem Dreieck sind die Seiten *a*, *b* und der Winkel φ zwischen beiden bekannt. Zu bestimmen ist die dritte Seite und der Winkel θ.



Lösung: Wir führen Vektoren $\vec{A}$, $\vec{B}$ und $\vec{C}$ ein. Es gilt: $\vec{C} = \vec{B} - \vec{A}$. Zur Bestimmung der Seite *c* berechnen wir das Skalarprodukt des Vektors $\vec{C}$ mit sich selbst: $c^2 = \vec{C}\cdot\vec{C} = \left(\vec{B} - \vec{A}\right)^2 =$

$\vec{B}^2 - 2\vec{B}\cdot\vec{A} + \vec{A}^2 = b^2 - 2ba\cos\varphi + a^2$.

Somit ist $c = \sqrt{b^2 - 2ba\cos\varphi + a^2}$.

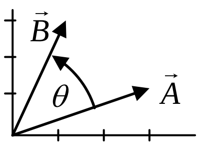
Um den Winkel θ zu bestimmen, berechnen wir das Skalarprodukt $\vec{A}\cdot\vec{C} = ac\cos\theta$. Daraus folgt

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{C}}{ac} = \frac{\vec{A}\cdot\left(\vec{B}-\vec{A}\right)}{ac} = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B} - \vec{A}^2}{ac} =$$

$$= \frac{ab\cos\varphi - a^2}{ac} = \frac{b\cos\varphi - a}{\sqrt{b^2 - 2ba\cos\varphi + a^2}} .$$

B2. Zwei Vektoren seien durch ihre Komponenten gegeben:

$\vec{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.



Zu bestimmen ist der Winkel zwischen den Vektoren.

Lösung: Aus der Definition des Skalarproduktes folgt: $\cos\theta = \dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB} = \dfrac{6}{10} = 0{,}6$. $\boxed{\theta = 53{,}13°}$

VII. Kraft ist einer der Grundbegriffe der Mechanik. Die Einheit der Kraft, *Newton* [$N = kg\cdot m/s^2$], kommt aus der Dynamik.

Die Kraft ist ein gebundener, linienflüchtiger **Vektor**. Am einfachsten ist der Fall, wo alle Kräfte an einem Punkt angreifen: *Zentrale Kräftegruppe.*

VIII. Gleichgewicht Ein starrer Körper ist im Gleichgewicht, wenn die auf ihn wirkende Kraft gleich Null ist: $\vec{F} = 0$. Diese Gleichung ist äquivalent zu den *drei Gleichungen*:

$F_x = 0$, $F_y = 0$ und $F_z = 0$.

Oder: Die Summe aller an ihm angreifenden Kräfte ist gleich Null: $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0}$.

$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0$, $R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0$, $R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0$.

IX. Einteilung der Kräfte:

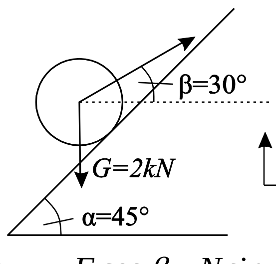
- eingeprägte Kräfte

- Zwangs- oder Reaktionskräfte

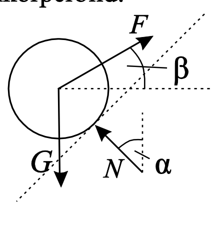
Reaktionskräfte werden durch *Freischneiden* sichtbar gemacht. Das Bild mit den eingetragenen Kräften nennt man *Freikörperbild.*

Der Betrag der Reaktionskräfte ist von Anfang an nicht bekannt; die Richtung der Reaktionskräfte kann man dagegen in meisten Fällen leicht bestimmen. *Die Richtung der Reaktionskraft ist immer die Richtung, in der die Bewegung verhindert ist.*

B3. Eine Rolle (Gewicht $G = 2\,\mathrm{kN}$) wird auf einer schiefen Ebene (Neigungswinkel 45°) durch einen Faden (Neigungswinkel 30°) gehalten. Zu bestimmen ist die Spannkraft des Fadens und die Druckkraft auf die Ebene.



Freikörperbild:



x: $\quad F\cos\beta - N\sin\alpha = 0$

y: $\quad F\sin\beta + N\cos\alpha - G = 0$

$$\begin{cases} F\cos\beta\sin\beta - N\sin\alpha\sin\beta = 0 \\ F\sin\beta\cos\beta + N\cos\alpha\cos\beta = G\cos\beta \end{cases}$$

$N\left(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\right) = G\cos\beta$,

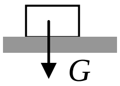
$$\boxed{\begin{aligned} N &= \frac{G\cos\beta}{\left(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\right)} = \frac{G\cos\beta}{\cos(\alpha-\beta)} . \\ F &= \frac{G\sin\alpha}{\left(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\right)} = \frac{G\sin\alpha}{\cos(\alpha-\beta)} . \end{aligned}}$$

Moment einer Kraft. Moment eines Kräftepaars. Gleichgewichtsbedingungen in der Ebene.

Literatur: ***Hauger, Schnell und Groß.*** **Technische Mechanik 1 (Statik), 3.1.1-3.1.4**

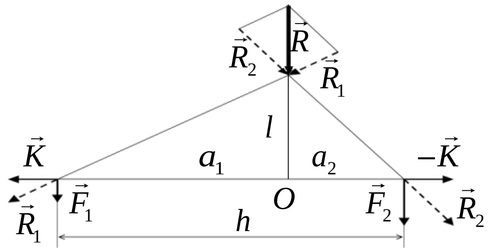
I. Das dritte Newtonsche Gesetz (actio=reactio)

Kraft und Gegenkraft sind gleich groß, entgegengesetzt gerichtet und liegen auf der gleichen Wirkungslinie.



Wo ist hier die Gegenkraft?
(Antwort in der Vorlesung)

II. Resultierende für zwei parallele Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$



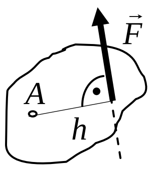
$$\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 = \vec{F}_1 + \vec{K} + \vec{F}_2 - \vec{K} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 .$$

$$\frac{F_1}{K} = \frac{l}{a_1}, \quad \frac{F_2}{K} = \frac{l}{a_2} \quad \Rightarrow \boxed{F_1 a_1 = F_2 a_2} \quad (1)$$

das *Hebelgesetz* von Archimedes.

III. Kraftmoment

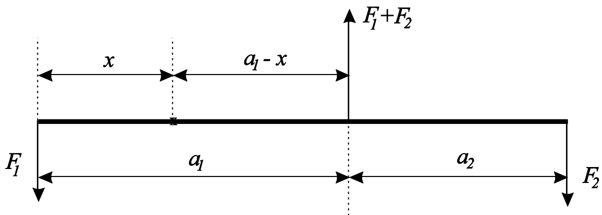
Man kann das Hebelgesetz anders interpretieren, indem man den Begriff des *Kraftmomentes* einführt.



Das Moment einer Kraft in einer Ebene ist eine algebraische Größe, deren Betrag gleich $\boxed{\left|M^{(A)}\right| = hF}$ *ist.*

Es wird vereinbart, dass ein Moment positiv ist, wenn es gegen den Uhrzeigersinn dreht.

Das Hebelgesetz (1) bedeutet, dass im Gleichgewicht die *Summe aller Momente Null ist.* Diese Bedingung hängt nicht von der Wahl des Bezugspunktes ab.



Beweis: Wählen wir einen Bezugspunkt im Abstand x vom linken Ende des Stabes. Die Summe aller Momente ist gleich:

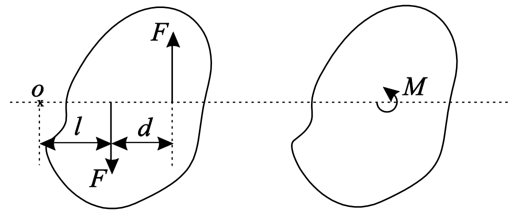
$$\sum M^{(x)} = F_1 x + \left(F_1 + F_2\right)\left(a_1 - x\right) - F_2(a_1 + a_2 - x)$$
$$= F_1 x + F_1 a_1 - F_1 x + F_2 a_1 - F_2 x - F_2 a_1 - F_2 a_2 + F_2 x$$
$$= F_1 a_1 - F_2 a_2 = 0$$

IV. Gleichgewichtsbedingungen in einer Ebene

Ein starrer Körper ist dann im Gleichgewicht, wenn die Summe aller an ihm angreifenden Kräfte gleich Null und die Summe aller Kraftmomente gleich Null ist:

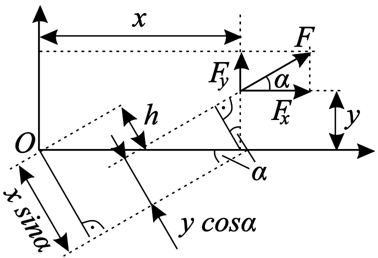
$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0} \quad \textbf{und} \quad \sum_{i=1}^{n} M_i = 0 .}$$

V. Kräftepaar



$M^{(O)} = F\left(l + d\right) - Fl = Fd$ - hängt nicht von der Wahl des Bezugspunktes ab!

VI. Komponentendarstellung des Moments



Die Kraft $\vec{F}$ habe die kartesischen Komponenten F_x und F_y .

Der Angriffspunkt der Kraft habe die Koordinaten x und y. Zu bestimmen ist das Kraftmoment. Dem Bild kann man entnehmen, dass der Hebelarm $h = x \sin\alpha - y \cos\alpha$ mit $\sin\alpha = F_y / F$ und $\cos\alpha = F_x / F$ ist. Das Kraftmoment ist somit $\boxed{M = xF_y - yF_x} \Rightarrow$ Das Moment einer Kraft ist gleich der Summe der Momente ihrer Kraftkomponenten.

Vorteil: Die Komponentendarstellung ergibt immer "automatisch" sowohl den Betrag als auch das Vorzeichen (und somit den Drehsinn) des Momentes richtig.

VII. Gleichgewichtsbedingungen in Komponentendarstellung

Kräftegleichgewicht:

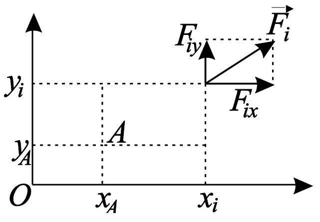
$$\sum \vec{F}_i = \vec{0} \;\Rightarrow\; \sum F_{ix} = 0, \; \sum F_{iy} = 0 .$$

Momentengleichgewicht:

$$\sum M_i^{(O)} = 0 \;\Rightarrow\; \sum\left(x_i F_{iy} - y_i F_{ix}\right).$$

Die Bedingung für das Momentengleichgewicht hat nur Sinn, wenn sie *nicht* von der Wahl des Bezugspunktes abhängt.

Beweis dazu: Wählen wir einen anderen Bezugspunkt A mit den Koordinaten x_A und y_A.



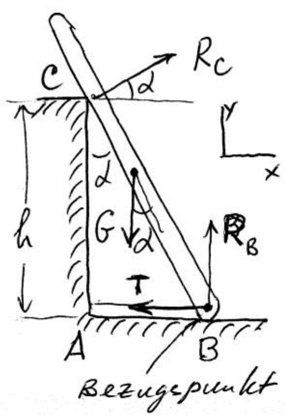
Die kartesischen Koordinaten des Angriffspunktes der Kraft bezüglich des neuen Bezugspunkts sind $x_i - x_A$ und $y_i - y_A$. Das Moment bezüglich des neuen Bezugspunktes ist

$$\begin{aligned}\sum M_i^{(A)} &= \sum\left[\left(x_i - x_A\right)F_{iy} - \left(y_i - y_A\right)F_{ix}\right] \\ &= \sum\left(x_i F_{iy} - y_i F_{ix}\right) - x_A \sum F_{iy} + y_A \sum F_{ix} \\ &= \sum M_i^{(O)} - x_A \sum F_{iy} + y_A \sum F_{ix} \\ &= \sum M_i^{(O)}\end{aligned}$$

VIII. Allgemeines Schema:

- Das System skizzieren
- Das interessierende Objekt freischneiden
- Alle eingeprägten Kräfte und Reaktionskräfte auftragen
- Gleichgewichtsbedingungen aufstellen
- Die Zahl der Unbekannten und der Gleichungen zählen
- Das Gleichungssystem lösen
- Lösung auswerten

B1. Eine Leiter der Länge l stützt auf eine Wand der Höhe h. Der Winkel zur Wand ist α. Alles geschieht draußen bei Glatteis. Damit die Leiter nicht gleitet, wird sie von einem Seil gehalten. Zu bestimmen sind die Reaktionskräfte an der Wand, am Boden und die Zugkraft des Seils.



Lösung: Gleichgewichtsbedingungen lauten

$$\sum F_x: \quad R_C \cos\alpha + 0 + 0 - T = 0$$

$$\sum F_y: \quad R_C \sin\alpha - G + R_B + 0 = 0$$

$$\sum M^{(B)}: \quad G\sin\alpha \cdot \frac{l}{2} - R_C h/\cos\alpha = 0.$$

Aus der dritten Gleichung folgt

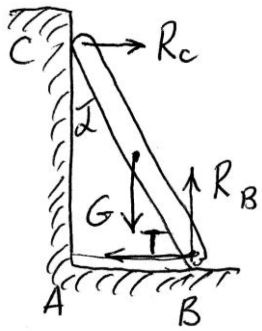
$$R_C = G\frac{l}{2h}\sin\alpha\cos\alpha.$$

Einsetzen in die 1. und 2. Gleichungen ergibt:

$$T = R_C\cos\alpha = G\frac{l}{2h}\sin\alpha\cos^2\alpha,$$

$$R_B = G\left(1 - \frac{l}{2h}\sin^2\alpha\cos\alpha\right).$$

B2. Wie ändert sich das Ergebnis, wenn die Leiter an eine vertikale Wand angelehnt ist?



Lösung: Gleichgewichtsbedingungen:

$$R_C - T = 0$$

$$G - R_B = 0$$

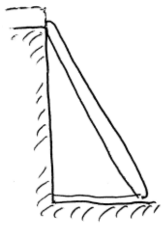
$$G\frac{l}{2}\sin\alpha - R_C l\cos\alpha = 0$$

Daraus folgt

$$R_C = G\frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha} = \frac{G}{2}\tan\alpha,$$

$$T = R_C = \frac{G}{2}\tan\alpha, \quad R_B = G.$$

B3. Vergleichen Sie die Seilkraft in den zwei Fällen: Leiter draufliegend, Leiter angelehnt.



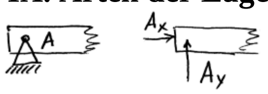
Lösung: Bemerken wir zunächst, dass im skizzierten Fall $h/l = \cos\alpha$ ist. Die Seilkraft kann daher in:

$$T = \frac{G}{2}\sin\alpha\cos\alpha$$

umgeschrieben werden. Diese Kraft ist kleiner als im Fall "angelehnt":

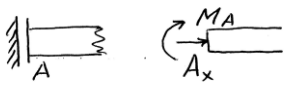
$$T_{draufliegend} = \frac{G}{2}\sin\alpha\cos\alpha < T_{angelehnt} = \frac{G}{2}\sin\alpha\frac{1}{\cos\alpha}$$

IX. Arten der Lager

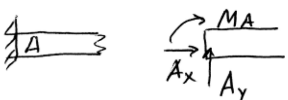


Festes Gelenklager, kein Moment

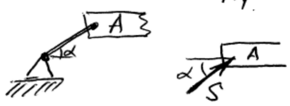
Verschiebliches Gelenklager, kein Moment, keine Normalkraft



Gleitführung, keine Querkraft



Einspannung

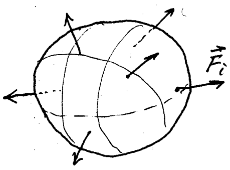


Nicht dehnbare Stange (oder Seil)

Das Kreuzprodukt von Vektoren. Der Momentenvektor. Allgemeine Kräftegruppen im Raum.

Literatur: ***Hauger, Schnell und Groß.*** **Technische Mechanik 1 (Statik), 3.2.1-3.2.2**

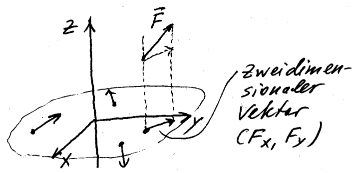
I. Gleichgewicht in drei Dimensionen



A. Kräftegleichgewicht

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0}$$

B. Momentengleichgewicht bezüglich aller drei Achsen.



Momentengleichgewicht bezüglich der z-Achse:

Die z-Komponente der Kraft ist ohne Bedeutung. Die x- und y-Komponenten können parallel verschoben werden, so dass sie in der Ebene (x,y) liegen. Nach solcher Transformation von allen Kräften lautet die Gleichgewichtsbedingung: $\sum_{i=1}^{n}\left(x_i F_{iy} - y_i F_{ix}\right) = 0$.

Ähnliche Überlegungen für das Momentengleichgewicht bezüglich der x- und y-Achsen liefern

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i F_{iz} - z_i F_{iy}\right) = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n}\left(z_i F_{ix} - x_i F_{iz}\right) = 0.$$

Diese Gleichgewichtsbedingungen kann man anders formulieren, indem man den Begriff der Kraftmomente bezüglich der x-, y- und z-Achsen einführt.

II. Kraftmoment bezüglich einer Achse

$M_z = xF_y - yF_x$: Kraftmoment bezüglich der z-Achse

$M_x = yF_z - zF_y$: Kraftmoment bezüglich der x-Achse

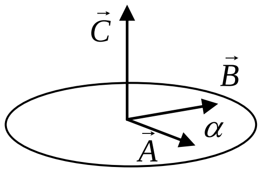
$M_y = zF_x - xF_z$: Kraftmoment bezüglich der y-Achse

Die Gleichgewichtsbedingungen in drei Dimensionen lauten:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_{iz} = 0$$

III. Vektor- oder Kreuzprodukt von zwei Vektoren



$$\boxed{\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}}$$

1) Richtung: Achse senkrecht zu $\vec{A}$ *und* $\vec{B}$ *+ Schraubenregel*

2) *Betrag:* $\left|\vec{C}\right| = AB\left|\sin\alpha\right|$

IV. Eigenschaften des Vektorproduktes

1) $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$ (*antikommutativ*)

2) $\vec{A} \times \left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$.

3) Ist $\vec{A} \,||\, \vec{B}$, so ist $\vec{A} \times \vec{B} = 0$.

V. Koordinatendarstellung des Kreuzproduktes.

Zwei Vektoren seien durch ihre kartesischen Komponenten gegeben:

$$\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z,$$

$$\vec{B} = B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y + B_z \vec{e}_z.$$

Zu berechnen ist das Kreuzprodukt

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

$$= A_x B_x \left(\vec{e}_x \times \vec{e}_x\right) + A_x B_y \left(\vec{e}_x \times \vec{e}_y\right) + A_x B_z \left(\vec{e}_x \times \vec{e}_z\right) +$$

$$+ A_y B_x \left(\vec{e}_y \times \vec{e}_x\right) + A_y B_y \left(\vec{e}_y \times \vec{e}_y\right) + A_y B_z \left(\vec{e}_y \times \vec{e}_z\right) +$$

$$+ A_z B_x \left(\vec{e}_z \times \vec{e}_x\right) + A_z B_y \left(\vec{e}_z \times \vec{e}_y\right) + A_z B_z \left(\vec{e}_z \times \vec{e}_z\right)$$

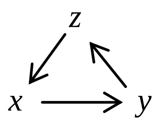
$$= \left(A_y B_z - A_z B_y\right)\vec{e}_x + \left(A_z B_x - A_x B_z\right)\vec{e}_y + \left(A_x B_y - A_y B_x\right)\vec{e}_z$$

Kartesische Komponenten dieses Vektors sind

$C_x = A_y B_z - A_z B_y$,

$C_y = A_z B_x - A_x B_z$

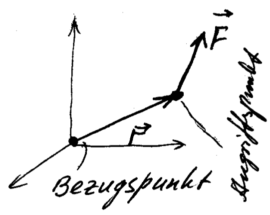
$C_z = A_x B_y - A_y B_x$



x,y,z-Achsen bilden ein *rechtes* Koordinatensystem

VI. Momentenvektor

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$$



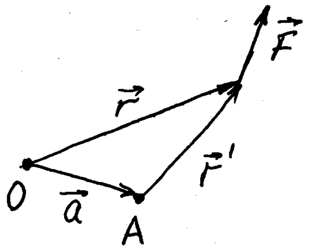
$M_x = yF_z - zF_y$

$M_y = zF_x - xF_z$

$M_z = xF_y - yF_x$

VII. Gleichgewichtsbedingungen in Vektorform $\sum \vec{F}_i = 0, \quad \sum \vec{M}_i = 0$.

VIII. Änderung des Momentenvektors bei einer Verschiebung des Bezugspunktes



Gegeben seien zwei Bezugspunkte O und A. Der Momentenvektor der Kraft $\vec{F}$ bezüglich des Punktes O ist

$$\vec{M}^{(O)} = \vec{r} \times \vec{F},$$

bezüglich des Punktes A: $\vec{M}^{(A)} = \vec{r}' \times \vec{F}$.
Dem Bild entnimmt man, dass $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{a}$ ist.
Daraus folgt

$$\vec{M}^{(O)} = \vec{r} \times \vec{F} = (\vec{r}' + \vec{a}) \times \vec{F} = \vec{r}' \times \vec{F} + \vec{a} \times \vec{F}$$

$$= \vec{M}^{(A)} + \vec{a} \times \vec{F}$$

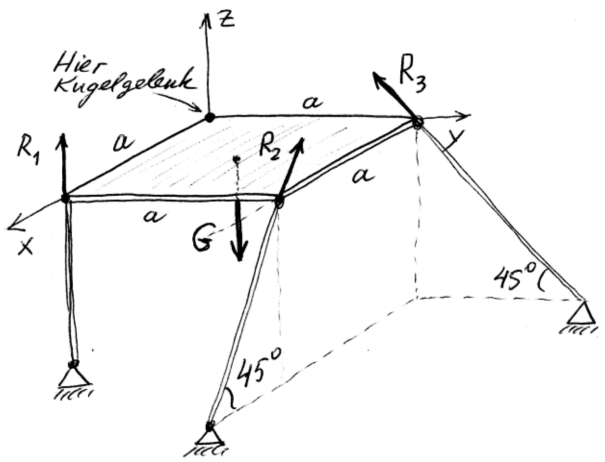
Greifen am Körper gleichzeitig mehrere Kräfte an, so haben wir für das Gesamtmoment

$$\sum \vec{M}_i^{(O)} = \sum \vec{M}_i^{(A)} + \sum \vec{a} \times \vec{F}_i$$

$$= \sum \vec{M}_i^{(A)} + \vec{a} \times \left(\sum \vec{F}_i \right).$$

Im Gleichgewicht ist die Summe aller Kräfte Null und das Kraftmoment hängt *nicht* von der Wahl des Bezugspunktes ab: $\sum \vec{M}_i^{(O)} = \sum \vec{M}_i^{(A)}$

B1. Eine Platte mit dem Gewicht G ist an einer Ecke mit einem Kugelgelenk befestigt und an drei anderen Ecken durch gelenkig gelagerte Stäbe unterstützt. Zu bestimmen sind die Stabkräfte.



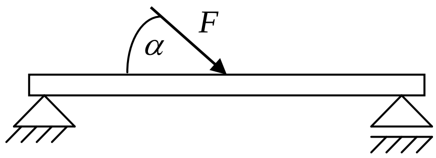
Lösung: Auf die Platte wirken: die Schwerkraft G, drei Stabreaktionskräfte (in der Richtung des jeweiligen Stabes) und eine Kraft mit im Allgemeinen allen drei kartesischen Komponenten im Kugelgelenk. Da wir uns für die Kräfte im Kugelgelenk nicht interessieren, reicht es, die drei Gleichungen für das Momentengleichgewicht aufzustellen. Dabei muss der Bezugspunkt im Koordinatenursprung gewählt werden (nur dann fallen die Gelenkkräfte aus den Momentengleichungen heraus).

Momentengleichgewicht:

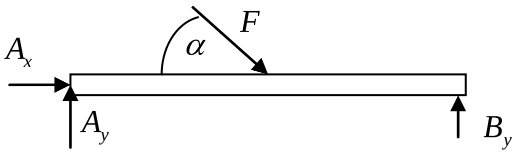
$$\left.\begin{aligned} M_x^{(O)} &= -G\frac{a}{2} + R_2\frac{\sqrt{2}}{2}a + R_3\frac{\sqrt{2}}{2}a = 0 \\ M_y^{(O)} &= -R_1 a + G\frac{a}{2} - R_2\frac{\sqrt{2}}{2}a = 0 \\ M_z^{(O)} &= R_2\frac{\sqrt{2}}{2}a = 0 \end{aligned}\right\}$$

Daraus folgt: $R_2 = 0$, $R_1 = G/2$, $R_3 = G/\sqrt{2}$.

B2. In der Mitte eines Trägers, der links mit einem festen Gelenklager und rechts mit einem verschieblichen Gelenklager gelagert ist, greift eine Kraft F an. Die Wirkungslinie der Kraft bildet mit dem Träger den Winkel $\alpha = 45°$. Zu bestimmen sind die Auflagerreaktionen.



Freikörperbild:



Lösung: Das Kräftegleichgewicht liefert

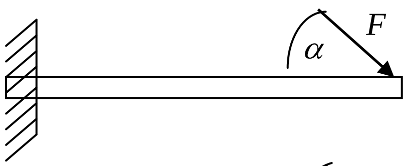
$$\left.\begin{aligned} x: &\quad A_x + F\cos\alpha = 0 \\ y: &\quad A_y - F\sin\alpha + B_y = 0 \\ M^{(A)}: &\quad -(F\sin\alpha)l/2 + B_y l = 0. \end{aligned}\right\}$$

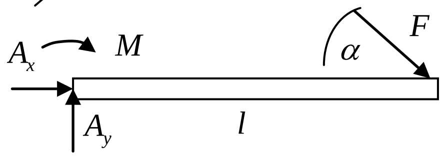
Aus der letzten Gleichung folgt:
$B_y = (F\sin\alpha)/2$.

Aus der zweiten: $A_y = (F\sin\alpha)/2$.

Aus der ersten: $A_x = -F\cos\alpha$

B3. Ein Balken ist in einer Wand fest eingespannt und ist wie im vorigen Beispiel mit einer schräg gerichteten Kraft belastet. Zu bestimmen sind die Auflagerreaktionen.



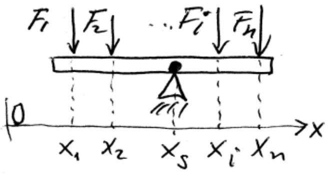


Mechanik I / Prof. Popov / Vorlesung 4. **Schwerpunkt**

Literatur: ***Hauger, Schnell und Groß.*** **Technische Mechanik 1 (Statik), 4.1-4.4**

I. Schwerpunkt einer Gruppe paralleler Kräfte

(A) Auf einen Stab greifen N parallele Kräfte an. Wo muss man den Balken unterstützen, damit er im Gleichgewicht bleibt? (Dieser Punkt heißt der Schwerpunkt des Kraftsystems).



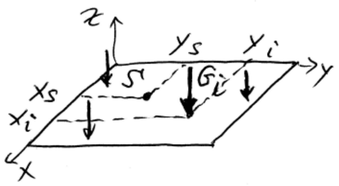
Lösung: Das Kraftmoment bezüglich des Punktes S muss verschwinden:

$$\left(x_1 - x_s\right)F_1 + ...\left(x_i - x_s\right)F_i + ... = \sum\left(x_i - x_s\right)F_i = 0$$

oder $\sum x_i F_i - x_s \sum F_i = 0$. Daraus folgt

$$\boxed{x_s = \frac{\sum x_i F_i}{\sum F_i}}$$

(B) Dasselbe gilt für ein System von Kräften, die an einer Platte angreifen. *Lösung:* Momentengleichgewicht bezüglich des Schwerpunkts S:



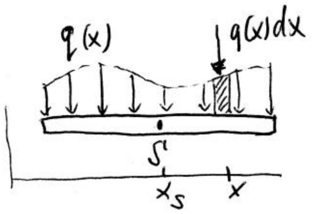
um die x-Achse: $\sum\left(y_i - y_s\right)G_i = 0$,

um die y-Achse: $\sum\left(x_i - x_s\right)G_i = 0$.

Daraus folgt: $\boxed{x_s = \frac{\sum x_i G_i}{\sum G_i}}$, $\boxed{y_s = \frac{\sum y_i G_i}{\sum G_i}}$.

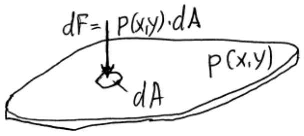
II. Kontinuierlich verteilte Kräfte

Eine auf einer *Linie* kontinuierlich verteilte Kraft wird durch die *Streckenlast* $q(x)$ charakterisiert. Die auf ein infinitesimal kleines Längenelement dl wirkende Kraft ist gleich $dF = q(x)dx$. Bei kontinuierlich verteilten Kräften werden in der Schwerpunktdefinition die Summen durch Integrale ersetzt:



$$\boxed{x_s = \frac{\sum\limits_{\Delta x_i \to 0} x_i q(x_i)\Delta x_i}{\sum\limits_{\Delta x_i \to 0} q(x_i)\Delta x_i} = \frac{\int x\, q(x)\,\mathrm{d}x}{\int q(x)\,\mathrm{d}x}}.$$

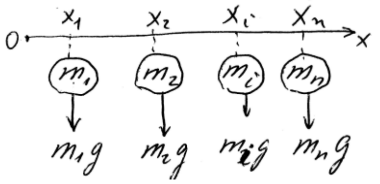
Im *zweidimensionalen* Fall wird eine kontinuierlich verteilte Kraft durch den *Druck* $p = p(x,y)$ charakterisiert. Die auf ein infinitesimal kleines Flächenelement dA wirkende Kraft ist gleich $\mathrm{d}F = p(x,y)\,\mathrm{d}A$. Für die Schwerpunktkoordinate ergibt sich



$$\boxed{x_s = \frac{\sum\limits_{\Delta x_i \to 0} x_i\, p(x_i,y_i)\Delta A_i}{\sum\limits_{\Delta x_i \to 0} p(x_i,y_i)\Delta A_i} = \frac{\int x p(x,y)\mathrm{d}A}{\int p(x,y)\mathrm{d}A}} \quad \boxed{y_s = \frac{\int y p(x,y)\mathrm{d}A}{\int p(x,y)\mathrm{d}A}}$$

III. Schwerpunkt von Schwerekräften

Den wichtigsten Sonderfall eines Systems von parallelen Kräften stellen Schwerekräfte dar. Die auf einen Körper mit der Masse m_i wirkende Kraft ist gleich $F_i = m_i g$. Alle Kräfte haben dieselbe Richtung. Aus der allgemeinen Formel für die Koordinate des Schwerpunkts folgt:



$$\boxed{x_s = \frac{\sum x_i m_i g}{\sum m_i g} = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i} = \frac{\sum x_i m_i}{m}}$$

(m ist hier die Gesamtmasse aller Körper).

Ähnliches gilt für die y und z-Koordinaten des Schwerpunkts: $\boxed{y_s = \frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i}}$, $\boxed{z_s = \frac{\sum z_i m_i}{\sum m_i}}$.

Bei kontinuierlichen Körpern werden die Summen durch Integrale ersetzt:

$$\boxed{x_s = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i} \Rightarrow \frac{\int x\,\mathrm{d}m}{m}}, \boxed{y_s = \frac{\int y\,\mathrm{d}m}{m}}, \boxed{z_s = \frac{\int z\,\mathrm{d}m}{m}}$$

Das Differential der Masse kann als $\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V$ geschrieben werden, wobei ρ die Dichte des Körpers ist und $\mathrm{d}V$ ein infinitesimal kleines Volumen. Somit nehmen die obigen Gleichungen die folgende Form an:

$$\boxed{x_s = \frac{\int x\rho\,\mathrm{d}V}{m}} \boxed{y_s = \frac{\int y\rho\,\mathrm{d}V}{m}} \boxed{z_s = \frac{\int z\rho\,\mathrm{d}V}{m}}.$$

IV. Berechnung von Integralen

Integrieren ist eine Umkehroperation zum Differenzieren: Eine Funktion $G(x)$, deren Ableitung gleich $g(x)$ ist, heißt ein *unbestimmtes Integral* von $g(x)$ (auch *Stammfunktion* von $g(x)$). Eine Tabelle von Ableitungen ist daher gleichzeitig - rückwärts gelesen - eine Tabelle von unbestimmten Integralen:

Funktion $f(x)$	Ableitung $g(x) = f\,'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$	Funktion $g(x)$	Stammfunktion (unbestimmtes Integral) $G(x) = \int g(x)\,\mathrm{d}x$
x	1	1	x
x^2	$2x$	x	$x^2/2$
x^3	$3x^2$	x^2	$x^3/3$
x^n	nx^{n-1}	x^{n-1}	x^n/n
$x^{1/2}$	$\frac{1}{2}x^{-1/2}$	$x^{-1/2}$	$2x^{1/2}$
$x^{3/2}$	$\frac{3}{2}x^{1/2}$	$x^{1/2}$	$\frac{2}{3}x^{3/2}$
e^{kx}	ke^{kx}	e^{kx}	e^{kx}/k
$\sin ax$	$a\cos ax$	$\cos ax$	$(\sin ax)/a$
$\cos ax$	$-a\sin ax$	$\sin ax$	$-(\cos ax)/a$
$\ln x$	$1/x$	$1/x$	$\ln x$

Die Berechnung von *bestimmten* Integralen beruht auf der Newtonschen Gleichung:

$$\boxed{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = G(b) - G(a) = G(x)\Big|_a^b}.$$

Bei der Berechnung von Integralen wird auch der Begriff "Differential" oft benutzt:

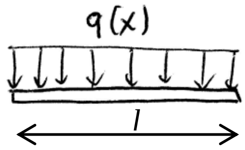
$$\boxed{\mathrm{d}f = f\,'\mathrm{d}x}.$$

Zum Beispiel, $\mathrm{d}(x^2) = 2x\mathrm{d}x$.

Unter der Benutzung des Begriffs "Differential" wird die Eigenschaft, daß Integrieren und Differenzieren zu einander Umkehroperationen sind, besonders klar:

$$\int \mathrm{d}f(x) = f(x), \qquad \mathrm{d}\int g(x)\,\mathrm{d}x = g(x)\,\mathrm{d}x.$$

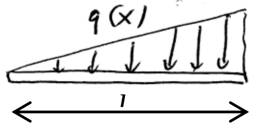
V. Beispiele



B1. Zu berechnen ist der Schwerpunkt einer konstanten Streckenlast.

Lösung: $q(x) = q_0 = const$.

$$x_s = \frac{\int_0^l xq(x)\,\mathrm{d}x}{\int_0^l q(x)\,\mathrm{d}x} = \frac{\int_0^l xq_0\mathrm{d}x}{\int_0^l q_0\mathrm{d}x} = \frac{\cancel{q_0}\int_0^l x\,\mathrm{d}x}{\cancel{q_0}\int_0^l \mathrm{d}x} = \frac{\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^l}{x\Big|_0^l} = \frac{l}{2}$$

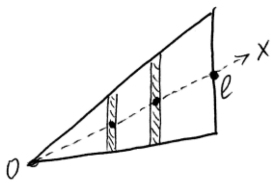


B2. Zu berechnen ist der Schwerpunkt einer linear steigenden Streckenlast.

Lösung: $q(x) = ax$

$$x_s = \frac{\int_0^l xq(x)\mathrm{d}x}{\int_0^l q(x)\mathrm{d}x} = \frac{\int_0^l xax\mathrm{d}x}{\int_0^l ax\mathrm{d}x} = \frac{\left[x^3/3\right]_0^l}{\left[x^2/2\right]_0^l} = \frac{2}{3}l.$$

B3. Zu berechnen ist die Lage des Schwerpunktes eines homogenen Dreiecks.



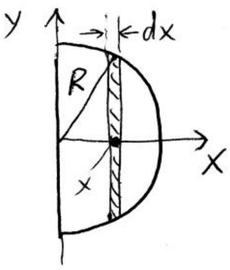
Lösung: Bei jedem dünnen Streifen liegt der Schwerpunkt in der Mitte und kann durch die in der Mitte angreifende Resultierende ersetzt werden. Angriffspunkte aller solcher "Teilresultierenden" liegen auf der Seitenhalbierenden des Dreiecks. Sie stellen eine linear steigende Streckenlast dar.

Der Schwerpunkt teilt somit die Seitenhalbierende im Verhältnis 2:1 (siehe Beispiel 2).

B4. Schwerpunkt eines Halbkreises

Die Fläche des dünnen Streifens ist $\mathrm{d}A = 2y\,\mathrm{d}x$. Aus dem Satz des Pythagoras folgt $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Die Koordinate des Schwerpunkts berechnet sich daher als

$$x_s = \frac{\int x\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{\int x\sigma\mathrm{d}A}{\int \sigma\mathrm{d}A} = \frac{\int x\mathrm{d}A}{\int \mathrm{d}A}$$



$$= \frac{\int x\,\mathrm{d}A}{A} = \frac{2}{\pi R^2}\int_0^R 2x\sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

(σ ist die Flächendichte der Platte).

Das letzte Integral berechnet sich z.B. mit Hilfe der Substitution $R^2 - x^2 = z$, $-2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}z$,

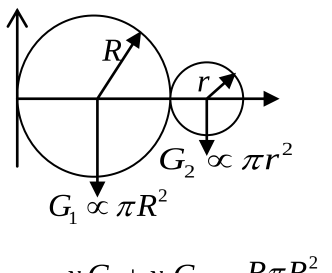
$x\Big|_0^R \to z\Big|_{R^2}^0 \Rightarrow$

$$x_s = \frac{2}{\pi R^2}\int_0^R 2x\sqrt{R^2 - x^2}\mathrm{d}x = -\frac{2}{\pi R^2}\int_{R^2}^0 \sqrt{z}\,\mathrm{d}z$$

$$= -\frac{2}{\pi R^2}\left[\frac{2}{3}z^{3/2}\right]_{R^2}^0 = \frac{4R^3}{3\pi R^2} = \frac{4R}{3\pi} \approx 0.424R$$

VI. Zusammengesetzte Figuren

B5. Die Koordinaten der Angriffspunkte der



Kräfte G_1 und G_2 sind $x_1 = R$,

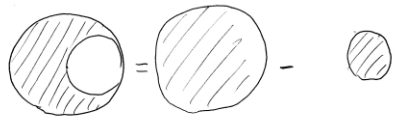
$x_2 = 2R + r$.

Für die Koordinate des Schwerpunktes ergibt sich

$$x_S = \frac{x_1G_1 + x_2G_2}{G_1 + G_2} = \frac{R\pi R^2 + (2R + r)\pi r^2}{\pi\left(R^2 + r^2\right)}$$

$$= \frac{R^3 + r^3 + 2Rr^2}{R^2 + r^2}$$

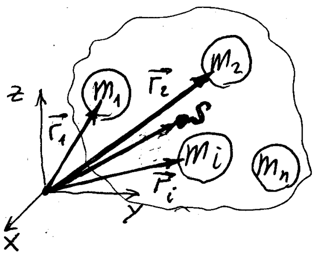
B6.

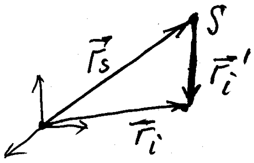


Schwerpunkt (Fortsetzung). Statische Bestimmtheit.

Literatur: ***Hauger, Schnell und Groß.*** **Technische Mechanik 1 (Statik), 4.1-4.4; 5.1.1, 5.1.2**

I. Schwerpunkt einer Gruppe von Massen





Gegeben sei ein System von kleinen, aber massiven Körpern, die alle starr miteinander verbunden sind. Auf den i-ten Körper wirkt die Schwerkraft $m_i\vec{g}$, wobei $\vec{g}$ die Fallbeschleunigung ist. Zu finden ist der Angriffspunkt der Resultierenden aller Kräfte (Schwerpunkt).

Lösung: Die Aufgabe kann umformuliert werden: Es ist der Punkt (S) zu finden, für den der Momentenvektor aller Kraftmomente bezüglich S Null ist. Die Lage des Punktes S ist durch die Gleichung

$$\vec{r}_s = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

gegeben.

Beweis: Es ist zu beweisen, dass das Gesamtkraftmoment bezüglich des oben angegebenen Punktes Null ist.

$$\begin{aligned}\vec{M}_S &= \sum_i m_i \vec{r}_i{}' \times \vec{g} = \sum_i m_i \left(\vec{r}_i - \vec{r}_S\right) \times \vec{g} \\ &= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{g} - \sum_i m_i \vec{r}_S \times \vec{g} = \\ &= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{g} - \left(\vec{r}_S \times \vec{g}\right) \sum_i m_i = \\ &= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{g} - \frac{\sum m_i \vec{r}_i \times \vec{g}}{\sum m_i} \sum_i m_i \equiv 0\end{aligned}$$

In Koordinaten:

$$\boxed{x_s = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}}, \boxed{y_s = \frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i}}, \boxed{z_s = \frac{\sum z_i m_i}{\sum m_i}}.$$

II. Schwerpunkt eines kontinuierlichen Körpers

Bei einem kontinuierlichen Körper werden Summen durch Integrale ersetzt:

$$x_s = \frac{\int x\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}, \quad y_s = \frac{\int y\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}, \quad z_s = \frac{\int z\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}.$$

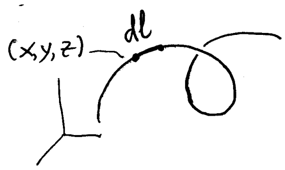
Das Differential der Masse kann als $dm = \rho dV$ geschrieben werden. Somit nehmen die obigen Gleichungen die folgende Form an:

$$x_s = \frac{\int x\,\mathrm{d}V}{\int \mathrm{d}V}, \quad y_s = \frac{\int y\,\mathrm{d}V}{\int \mathrm{d}V}, \quad z_s = \frac{\int z\,\mathrm{d}V}{\int \mathrm{d}V}.$$

Für eine homogene Scheibe mit der Flächendichte σ schreibt sich $dm = \sigma dA$ und die Koordinaten des Schwerpunkts nehmen die Form

$$x_s = \frac{\int x\,\mathrm{d}A}{\int \mathrm{d}A}, \quad y_s = \frac{\int y\,\mathrm{d}A}{\int \mathrm{d}A}, \quad z_s = \frac{\int z\,\mathrm{d}A}{\int \mathrm{d}A} \text{ an.}$$

Für eine Linie mit der Liniendichte λ gilt



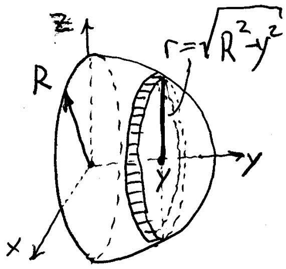
$$\mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}l$$

und

$$x_s = \frac{\int x\,\mathrm{d}l}{\int dl}, \; y_s = \frac{\int y\,\mathrm{d}l}{\int dl}, \quad z_s = \frac{\int z\,\mathrm{d}l}{\int \mathrm{d}l}.$$

III. Beispiele

B1. Zu bestimmen ist die Lage des Schwerpunkts einer homogenen Halbkugel.



Lösung: Der Schwerpunkt liegt auf der *y*-Achse. Es ist deshalb nur die *y*-Koordinate zu bestimmen:

$$y_s = \frac{\int y\,\mathrm{d}V}{\int \mathrm{d}V}.$$

Wir schneiden die Halbkugel in dünne Scheiben parallel zur (*x*, *z*)-Ebene. Das Volumendifferential ist gleich

$$\mathrm{d}V = \pi r^2 \mathrm{d}y = \pi\left(R^2 - y^2\right)\mathrm{d}y.$$

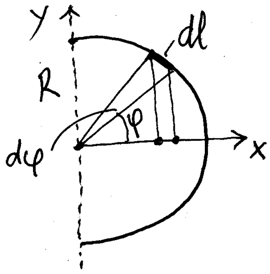
Die y-Koordinate des Schwerpunkts ist somit

$$y_s = \frac{\int_0^R y\pi\left(R^2 - y^2\right)\mathrm{d}y}{\int_0^R \pi\left(R^2 - y^2\right)\mathrm{d}y} = \frac{\int_0^R y\pi R^2 \mathrm{d}y - \int_0^R y\pi y^2 \mathrm{d}y}{\int_0^R \pi R^2 \mathrm{d}y - \int_0^R \pi y^2 \mathrm{d}y}$$

$$= \frac{\pi\left(R^2 R^2/2 - R^4/4\right)}{\pi\left(R^2 R - R^3/3\right)} = \frac{\pi R^4/4}{2\pi R^3/3} = \frac{3}{8}R$$

(Nenner: Volumen einer Halbkugel)

B2. Zu finden ist die Lage des Schwerpunkts eines Kreisbogens.



Lösung:

$$x_s = \frac{\int x\,\mathrm{d}l}{\int \mathrm{d}l} = \frac{\int x\,\mathrm{d}l}{\pi R}$$

Wenn wir zur Charakterisierung des laufenden Punktes am Kreisbogen den Winkel φ benutzen, so gilt:

$x = R\cos\varphi$, $\mathrm{d}l = R\,\mathrm{d}\varphi$, $\varphi\big|_{-\pi/2}^{\pi/2}$. Somit: ist

$$x_s = \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{\pi R} = \frac{R^2\left[\sin\varphi\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}}{\pi R} = \frac{2}{\pi}R\,.$$

IV. Statische Bestimmtheit

Definitionen:

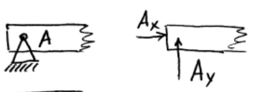
A) Die Zahl der *Freiheitsgrade f* ist die Zahl der unabhängigen Bewegungsmöglichkeiten eines Körpers (bzw. eines Körpersystems). Z.B. gilt für einen Punkt im Raum $f = 3$ und für einen starren Körper im Raum $f = 6$. Dasselbe gilt für die Ebene entsprechend mit 2 und 3.

Bemerkung: Die Zahl der Gleichgewichtsbedingungen ist immer gleich der Zahl der Freiheitsgrade.

B) Lager und Verbindungselemente sind *Bindungen*, die bestimmte Bewegungsarten verhindern.

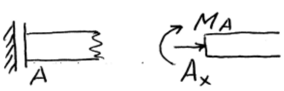
C) Die Anzahl der Freiheitsgrade, die eine Bindung einschränkt, heißt *Wertigkeit* der Bindung (des Lagers).

Bemerkung: Die Zahl der unbekannten Lagerreaktionen *r* ist immer gleich der Wertigkeit der Lager.

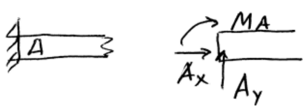


zweiwertig

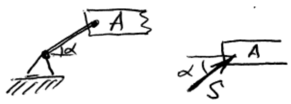
einwertig



zweiwertig



dreiwertig



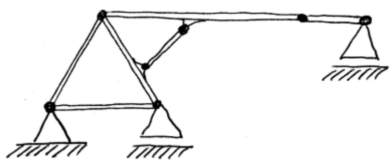
einwertig

D) Ein Tragwerk ist *statisch bestimmt*, wenn alle Lagerreaktionen eindeutig aus den Gleichgewichtsbedingungen bestimmbar sind.

E) Eine *notwendige Bedingung* für die statische Bestimmtheit ist, dass die Zahl der Gleichungen gleich der Zahl der Unbekannten ist, oder:

> *Bei einem statisch bestimmten System ist die Zahl der Freiheitsgrade gleich der Summe der Wertigkeiten aller Lager und Verbindungselemente.*

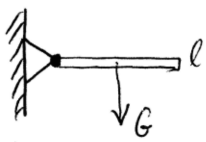
B1. Ist dieses Stabwerk statisch bestimmt?



(Antwort in der Vorlesung)

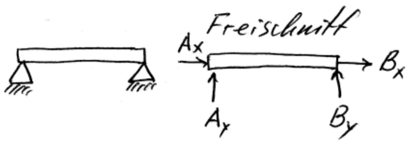
F) Ist die Zahl der Freiheitsgrade größer als die Wertigkeit der Lager (die Zahl der Gleichungen größer als die Zahl der Unbekannten) $\Rightarrow$ Gleichgewichtsgleichungen können nicht erfüllt werden - *kinematische Unbestimmtheit.*

B2.
Momentengleichung $Gl/2 = 0$ kann nicht erfüllt werden: Es gibt kein statisches Gleichgewicht.



G) Ist Die Zahl der Freiheitsgrade kleiner als die Wertigkeit $\Rightarrow$ Es gibt unendlich viele Gleichgewichtslösungen - *statische Unbestimmtheit.*

B3.

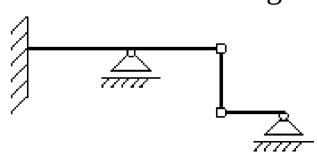


Gleichgewichtsgleichungen:

$A_x + B_x = 0$, $A_y + B_y = 0$, $B_y l = 0$.

Daraus folgt: $B_y = 0$, $A_y = 0$, $A_x = -B_x$. Die letzteren zwei Kräfte sind nicht eindeutig bestimmbar $\Rightarrow$ System ist statisch unbestimmt.

B4. Ist die notwendige Bedingung für statische Bestimmtheit bei dem abgebildeten System erfüllt? Geben Sie die von Ihnen benutzte Formel an! Benennen Sie die auftretenden Größen!



Ist dieses System statisch bestimmt?

Mechanik I / Prof. Popov / Vorlesung 6.

Statische Bestimmtheit. Berechnung der Lagerreaktionen.

Literatur: ***Hauger, Schnell und Groß.*** **Technische Mechanik 1 (Statik), 5.1.3, 5.2, 5.3.1-5.3.3**

I. Definitionen zur statischen Bestimmtheit

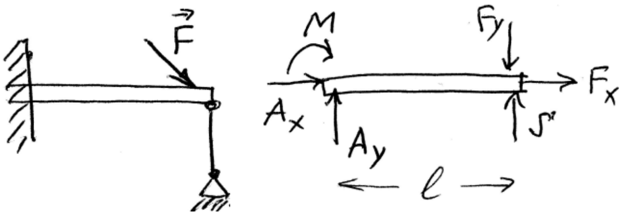
f - Zahl der Freiheitsgrade;
r - Gesamtwertigkeit aller *äußeren* Lager;
v - Gesamtwertigkeit aller *inneren* Bindungen.
n sei die Differenz zwischen dem Freiheitsgrad und der Gesamtwertigkeit: *n=f-r-v*.

3 Fälle sind möglich:

n<0 n-fach unbestimmtes System
n=0 statisch bestimmt
n>0 n-fach verschieblich

II. Beispiele

B1. Ein einfach statisch unbestimmtes System



Die Gleichgewichtsbeziehungen sind

$$A_x + F_x = 0,$$
$$A_y + S - F_y = 0,$$
$$-M + Sl - F_y l = 0.$$

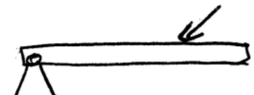
Daraus folgt:

$$A_x = -F_x,\ A_y = -S + F_y,\ M = Sl - F_y l\ .$$

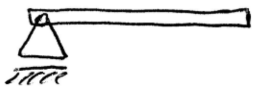
Über *eine* Kraft (z.B. *S*) können wir frei verfügen, die anderen sind dann eindeutig bestimmt. ⇒ *Einfach* unbestimmtes System.

B2.

einfach verschieblich



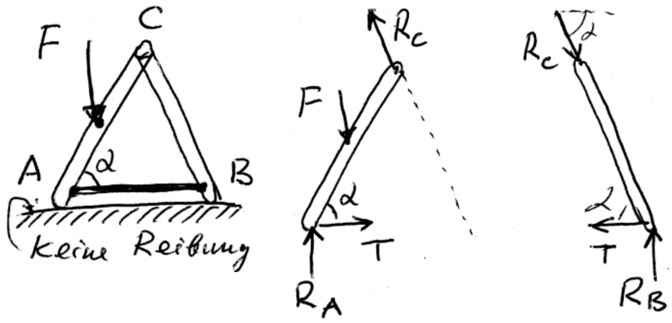
zweifach verschieblich



Bemerkung: Statische Unbestimmtheit bedeutet nicht, daß sich überhaupt keine Reaktionen eindeutig bestimmen lassen. Auch eine kinematisch unbestimmte Aufgabe kann in Spezialfällen eine eindeutige Lösung haben. Hier ein Beispiel dafür:

B3. Ein einfach verschiebliches System

Zwei Stäbe der Länge *l* sind oben mit einem Gelenk und unten mit einem Faden verbunden. In der Mitte des einen Stabes greift eine Kraft $\vec{F}$ an (das Gewicht der Stäbe vernachlässigen wir). Zu bestimmen sind die Reaktionskräfte.



Lösung: Zunächst überlegen wir, ob dieses System statisch bestimmt ist. $n = 6 - 5 = 1 \Rightarrow$ einfach beweglich.

Gleichgewichtsbedingungen:
Stab 1:

x: $\quad 0 = T - R_C \cos\alpha$

y: $\quad 0 = R_A - F + R_C \sin\alpha$

$$M^{(A)} : 0 = -\frac{Fl}{2}\cos\alpha + R_C \sin\alpha \cdot l\cos\alpha + R_c \cos\alpha \cdot l \sin\alpha$$

Stab 2:

x: $-T + R_C \cos\alpha = 0$

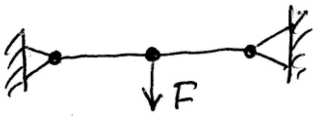
y: $R_B - R_C \sin\alpha = 0$

$M^{(B)}$: $\quad 0 = 0$

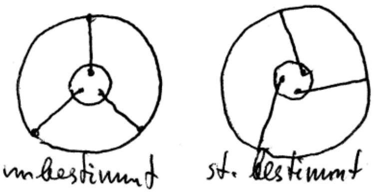
Ergebnis:

$$R_C = \frac{F}{4\sin\alpha},\quad T = R_C \cos\alpha = \frac{F}{4}\cot\alpha\ ,$$
$$R_B = R_C \sin\alpha = \frac{F}{4},\quad R_A = F - \frac{F}{4} = \frac{3}{4}F\ .$$

B4. Ausnahmefälle



$n = 6 - 6 = 0$.
Die notwendige Bedingung für statische Bestimmtheit ist erfüllt. Trotzdem gibt es keine statischen Lösungen (mit endlichen Reaktionskräften).

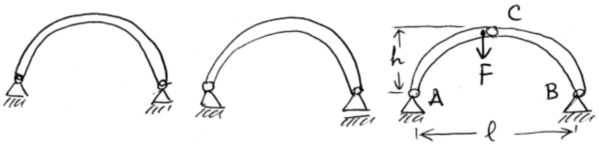


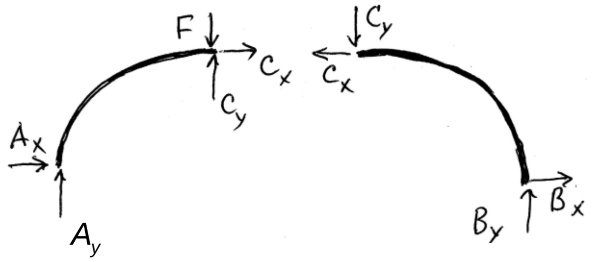
Rad mit Speichen (zweidimensional):

In beiden Fällen gilt: $n = 3 - 3 = 0$. Im linken Bild kann jedoch die Bedingung für das Momentengleichgewicht nicht erfüllt werden.

Rad mit Speichen (dreidimensional): Wie viele Speichen braucht man für eine statisch bestimmte Lagerung eines Rades?

B5. Dreigelenkbogen ($f=6$, $r=4$, $v=2$, $n=0 \Rightarrow$ statisch bestimmt).





x: $A_x + C_x = 0$ $\qquad -C_x + B_x = 0$

y: $A_y + C_y - F = 0$ $\qquad B_y - C_y = 0$

$M^{(A,B)}: C_y \dfrac{l}{2} - F\dfrac{l}{2} - C_x h = 0 \qquad C_y \dfrac{l}{2} + C_x h = 0$

Umformung:

$$A_x = -C_x$$

$$B_x = C_x = -A_x$$

$$C_y = -C_x \frac{2h}{l} = A_x \frac{2h}{l}$$

$$B_y = C_y = A_x \frac{2h}{l}$$

$$A_y = F - C_y = F - A_x \frac{2h}{l}$$

$$A_x \frac{2h}{l}\frac{l}{2} - F\frac{l}{2} + A_x h = 0$$

$$C_x = -\frac{Fl}{4h}$$

$$B_x = -\frac{Fl}{4h}$$

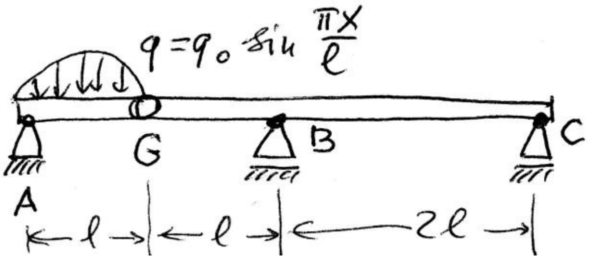
$$C_y = \frac{F}{2}$$

$$B_y = \frac{F}{2}$$

$$A_y = \frac{F}{2}$$

$$A_x = \frac{Fl}{4h}$$

B6. Gelenkbalken (Gerber-Träger)



r - Wertigkeit der Lager.

g - Anzahl der Gelenke des Balken.

$N = g+1$ - Zahl der "Teilbalken"

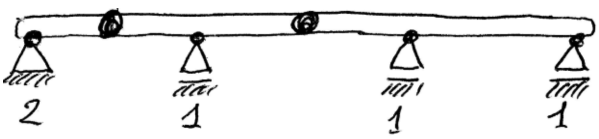
$f = 3N = 3(g+1)$.

Bedingung für die statische Bestimmtheit:

$f - r - 2g = 0 \;\Rightarrow\; r + 2g = 3(g+1)$

$$\boxed{g = r - 3}$$

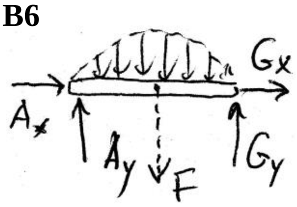
Beispiel:



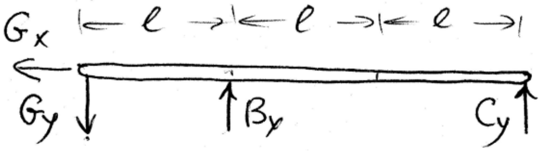
$r = 5 \;\Rightarrow\; g = r - 3 = 2$

Lösung der Aufgabe B6

$$F = \int_0^l q(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^l q_0 \sin\frac{\pi x}{l}\,\mathrm{d}x$$



$$= -q_0 \frac{l}{\pi}\cos\frac{\pi x}{l}\bigg|_0^l = -q_0\frac{l}{\pi}\left[\cos\pi - \cos 0\right] = \frac{2lq_0}{\pi}$$



Erster Teilbalken: $\qquad$ Zweiter Teilbalken:

x: $A_x + G_x = 0$ $\qquad -G_x = 0$

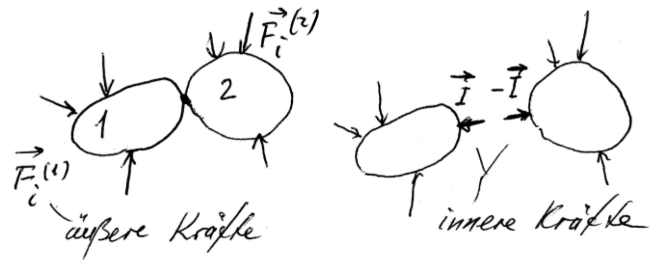
y: $A_y - F + G_y = 0$ $\qquad -G_y + B_y + C_y = 0$

$M^{(A)}: -Fl/2 + G_y l = 0$; $M^{(G)}: B_y l + C_y 3l = 0$

Aus diesen sechs Gleichungen folgt:

$G_x = 0$, $A_x = 0$, $G_y = F/2$, $A_y = F/2$, $C_y = -F/4$, $B_y = 3F/4$.

III. "Das Erstarrungsprinzip"



Erster Körper: $\sum \vec{F}_i^{(1)} + \vec{I} = 0$

Zweiter Körper: $\sum \vec{F}_i^{(2)} - \vec{I} = 0$

Daraus folgt: $\sum \vec{F}_i^{(1)} + \sum \vec{F}_i^{(2)} = 0$:

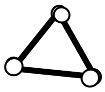
> Für ein System im Gleichgewicht ist die Summe aller *__äußeren__* Kräfte gleich Null (innere Kräfte bleiben unberücksichtigt).
> Dasselbe gilt für Momente.

$\Rightarrow$ Wir dürfen an einem Mehrkörpersystem als Ganzes Gleichgewichtsgleichungen aufstellen, als ob es starr wäre.
Das gilt auch für jedes Teilsystem.

Fachwerke. Verfahren zur Ermittlung der Stabkräfte: Knotenpunktverfahren.

Literatur: ***Hauger, Schnell und Groß.*** **Technische Mechanik 1 (Statik), 6.1, 6.2, 6.3.1.**

I. Fachwerke



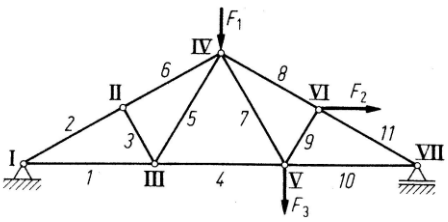
Grundelement eines Fachwerkes ist ein Dreieck. Auch bei einer gelenkigen Verbindung ist das ein starres Gebilde: $f = 9$, $v = 6$. Die Anzahl der restlichen Freiheitsgrade $n = 9 - 6 = 3$ ist so wie bei einem starren Körper. Die Erweiterung durch zwei weitere Stäbe (und 3 Gelenke) führt nicht zu einer Änderung der Zahl der Freiheitsgrade. Dieses Verfahren kann beliebig fortgesetzt werden.

II. Ideales Fachwerk

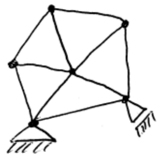
(1) Alle Stäbe sind reibungsfrei gelenkig verbunden
(2) Alle Kräfte greifen nur in den Knoten (Gelenken) an
(3) Alle Stäbe sind gewichtslos (folgt aus dem Punkt 2)

Aus den Gleichgewichtsbedingungen für jeden einzelnen Stab folgt, dass *in einem idealen Fachwerk alle Stäbe nur auf Zug oder Druck beansprucht sind*.

III. Statische Bestimmtheit von Fachwerken



Es ist üblich, die Stäbe mit arabischen Zahlen und die Knoten mit römischen Zahlen zu nummerieren. Dank den Annahmen eines idealen Fachwerkes brauchen wir nicht die Gleichgewichtsbedingungen für die Stäbe aufzustellen. Stattdessen schneiden wir eine kleine Umgebung eines Knotens frei. An der wirkt nun eine zentrale Kräftegruppe. Zur Ermittlung der Stabkräfte stehen *zwei* Kräftegleichgewichtsbedingungen *an jedem Knoten* zur Verfügung. Damit erhalten wir im obigen Beispiel insgesamt $7 \times 2 = 14$ Gleichungen zur Bestimmung der 14 Unbekannten (11 Stabkräfte und drei Lagerkräfte).
Bei einem ebenen Fachwerk mit *k* Knoten, *s* Stäben und *r* Lagerreaktionen hat man *2k* Gleichungen für *s + r* Unbekannte. Die *notwendige Bedingung* für die statische Bestimmtheit ist $\boxed{2k = s + r}$.

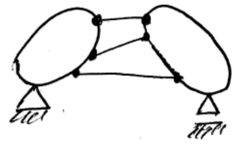


Ist dieses Fachwerk statisch bestimmt?

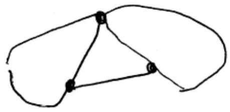
IV. Bildungsgesetze für Fachwerke

(1) Weitere Dreiecke hinzufügen $\Rightarrow$ *Einfaches Fachwerk*

(2) Zwei einfache Fachwerke starr (aber statisch bestimmt, d.h. *dreiwertig*) verbinden:



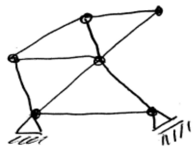
oder



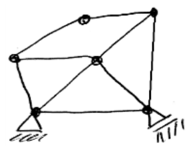
- mit drei Stäben

- mit einem Gelenk und einem Stab

(3) Irgendwo einen Stab herausnehmen und woanders anbringen.



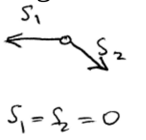
$\Rightarrow$

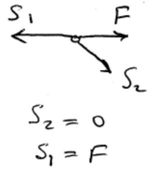


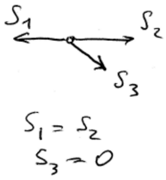
V. Ermittlung der Stabkräfte: Knotenpunktverfahren

Man schneidet alle Knotenpunkte frei und stellt für sie Kräftegleichgewichtsbedingungen auf.

Oft ist es sinnvoll, *zunächst* die nicht belasteten Stäbe (*Nullstäbe)* zu finden. Folgende Regeln können dabei helfen:



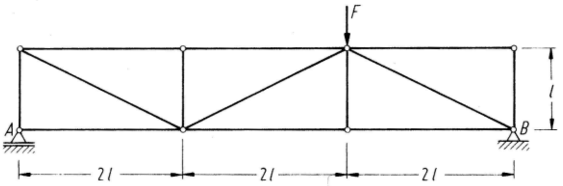




Standardverfahren zur Ermittlung der Stabkräfte:

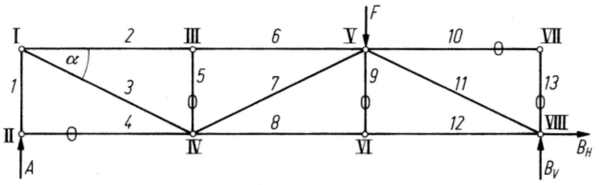
1. Alle Knoten und Stäbe nummerieren
2. Nullstäbe bestimmen
3. Das System als Ganzes freischneiden, Auflagerreaktionen bestimmen
4. Alle Knoten freischneiden und Stabkräfte auftragen
5. Kräftegleichgewicht für jeden einzelnen Knoten aufstellen
6. Das Gleichungssystem lösen
7. Alle Ergebnisse in eine Tabelle eintragen

B1. Das unten gezeigte Fachwerk wird durch die Kraft F belastet. Zu bestimmen sind alle Lager- und Stabkräfte.

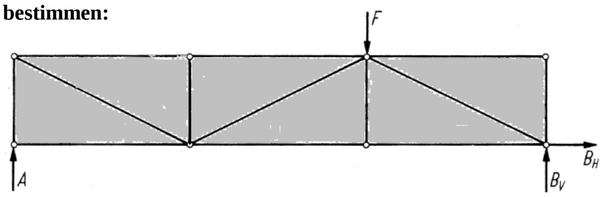


Lösung:

1. **Alle Knoten und Stäbe nummerieren**
2. **Nullstäbe bestimmen**



3. **Das System als Ganzes freischneiden, Auflagerreaktionen bestimmen:**



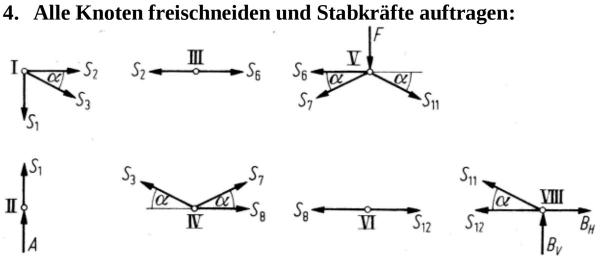
$\boxed{B_H = 0}$

$M^{(A)}: -4lF + 6lB_v = 0$

$\Rightarrow \boxed{B_v = \frac{2}{3}F}$

$M^{(B)}:\ 2lF - 6lA = 0 \ \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{3}F}$

4. **Alle Knoten freischneiden und Stabkräfte auftragen:**



5. **Kräftegleichgewicht für jeden einzelnen Knoten aufstellen:**

I)	→:	$S_2 + S_3 \cos\alpha = 0$	3
	↑:	$S_1 + S_3 \sin\alpha = 0$	2
II)	↑:	$S_1 + A = 0$	1
III)	→:	$S_6 - S_2 = 0$	4
IV)	→:	$S_8 - S_3 \cos\alpha + S_7 \cos\alpha = 0$	
	↑:	$S_3 \sin\alpha + S_7 \sin\alpha = 0$	
V)	→:	$-S_6 - S_7 \cos\alpha + S_{11} \cos\alpha = 0$	
	↑:	$F + S_7 \sin\alpha + S_{11} \sin\alpha = 0$	8
VI)	→:	$S_{12} - S_8 = 0$	7
VIII)	→:	$B_H - S_{12} - S_{11} \cos\alpha = 0$	6
	↑:	$B_v + S_{11} \sin\alpha = 0$	5

6. **Das Gleichungssystem lösen:** Reihenfolge der Lösung

$S_1 = -A = -\frac{1}{3}F\,;\ S_3 = -S_1/\sin\alpha = F/3\sin\alpha\,;$

$S_2 = S_6 = -S_3\cos\alpha = -F\cos\alpha/3\sin\alpha\,;$

$S_{11} = -B_v/\sin\alpha = -2F/3\sin\alpha\,;$

$S_{12} = S_8 = B_H - S_{11}\cos\alpha = 2F\cos\alpha/3\sin\alpha\,;$

$S_7 = -\frac{F}{\sin\alpha} + \frac{2F}{3\sin\alpha} = -\frac{F}{3\sin\alpha}\,;$

Aus der Geometrie folgt:

$\sin\alpha = 1/\sqrt{5}\,,\ \cos\alpha = 2/\sqrt{5}\,.$

Somit ergibt sich:

$S_1 = -A = -\frac{1}{3}F\,;\ S_3 = -S_1/\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}F}{3}\,;$

$S_2 = S_6 = -\frac{2F}{3}\,;\ S_{11} = -\frac{2\sqrt{5}F}{3}\,;$

$S_{12} = S_8 = \frac{4F}{3}\,;\ \ S_7 = -\frac{\sqrt{5}F}{3}\,;$

7. **Alle Ergebnisse in eine Tabelle eintragen**

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\frac{S_i}{F}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{\sqrt{5}}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	$-\frac{2\sqrt{5}}{3}$	$\frac{4}{3}$	0

Ist das ein statisch bestimmtes Fachwerk?

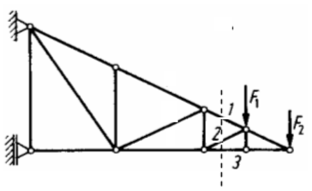
...und dieser Brückenträger?

Mechanik I / Prof. Popov / Vorlesung 8.

I. Fachwerke: Rittersches Schnittverfahren. II. Schnittlasten bei Balken.

Literatur: ***Hauger, Schnell und Groß.*** **Technische Mechanik 1 (Statik), 6.3.3. 7.1, 7.2.1, 7.2.2**

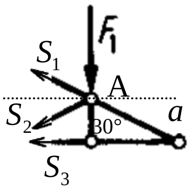
I. Rittersches Schnittverfahren



B1. Das Knotenpunktverfahren ist immer anwendbar. Sind aber nur *einzelne* Stabkräfte zu bestimmen, so ist es oft vorteilhaft, das Schnittverfahren nach Ritter zu benutzen. <u>Die Idee:</u> Das oben gezeigte Fachwerk kann man als aus zwei Teilen bestehend ansehen. Der Teil links vom Schnitt spielt die Rolle einer "starren Wand" und das rechte Dreieck ist ein starrer Körper, der dreiwertig gelagert ist. Die Stabkräfte in den drei geschnittenen Stäben können ermittelt werden, ohne irgendwas vom Rest der Konstruktion zu wissen.

Gleichzeitig illustriere ich das *Superpositionsprinzip* für statisch bestimmte Systeme und betrachte zwei folgende Teilaufgaben:

A1. $F_2 = 0$, $F_1 \neq 0$



x:
$$-S_1\cos 30° - S_2\cos 30° - S_3 = 0$$
y:
$$-F_1 + S_1\sin 30° - S_2\sin 30° = 0$$
$$\mathrm{M}^{(A)}:\ -S_3 a = 0$$

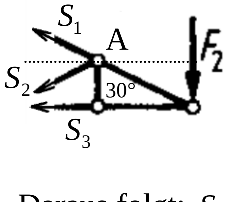
Daraus folgt:

$S_3 = 0$, $S_2 = -S_1$, $S_1 = F_1$.

Diese Ergebnisse können wir in einer Tabelle zusammenfassen:

$$\boxed{\left\{\begin{array}{c} S_1 = F_1 \\ S_2 = -F_1 \\ S_3 = 0 \end{array}\right\}}$$

A2. $F_2 \neq 0$, $F_1 = 0$



x:
$$-S_1\cos 30° - S_2\cos 30° - S_3 = 0$$
y:
$$-F_2 + S_1\sin 30° - S_2\sin 30° = 0$$
$$\mathrm{M}^{(A)}:\ -S_3 a - F_2 a\cot 30° = 0$$

Daraus folgt: $S_3 = -F_2\cot 30°$,

$$S_1 + S_2 = -\frac{S_3}{\cos 30°} = \frac{F_2\cot 30°}{\cos 30°} = \frac{F_2}{\sin 30°},$$

$$S_1 - S_2 = \frac{F_2}{\sin 30°}.$$

Summieren dieser Gleichungen ergibt

$S_1 = \dfrac{F_2}{\sin 30°}$. Subtrahieren: $S_2 = 0$.

Ergebnistabelle:

$$\boxed{\left\{\begin{array}{c} S_1 = F_2/\sin 30° \\ S_2 = 0 \\ S_3 = -F_2\cot 30° \end{array}\right\}}$$

A3. $F_2 \neq 0$, $F_1 \neq 0$.

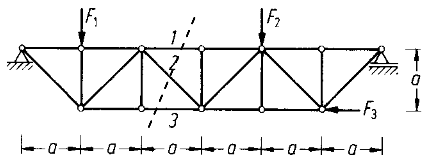
$$\boxed{\left\{\begin{array}{c} S_1 = F_1 + F_2/\sin 30° \\ S_2 = -F_1 \\ S_3 = -F_2\cot 30° \end{array}\right\}}$$

Das Superpositionsprinzip:

Reaktionen (Äußeres Kraftsystem 1 + äußeres Kraftsystem 2)= Reaktionen (Kraftsystem 1)+ Reaktionen (Kraftsystem 2)

(gilt für <u>alle</u> statisch bestimmte Systeme, nicht nur für Fachwerke!)

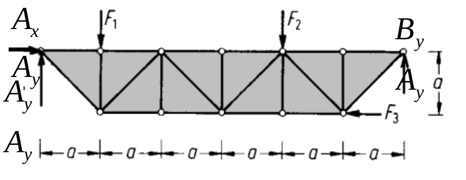
B2. Bei dem gezeigten Fachwerk sind die Kräfte in den Stäben 1,2,3 gesucht.



Lösung:

Schritt 1: Wir machen einen Schnitt durch die drei Stäbe. Dadurch wird das Fachwerk in zwei starre Körper zerlegt. Es gibt sechs Freiheitsgrade, drei äußere Lagerreaktionen und drei Stabkräfte $\Rightarrow$ Aufgabe ist lösbar (gerade deswegen muss der Schnitt immer über *drei* Stäbe oder ein Gelenk und einen Stab gehen).

Schritt 2: Die äußeren Reaktionen können durch einen Freischnitt des ganzen Systems ermittelt werden:



x: $A_x - F_3 = 0$,

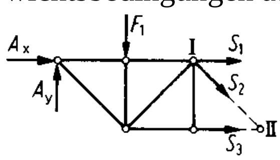
y: $A_y - F_1 - F_2 + B_y = 0$,

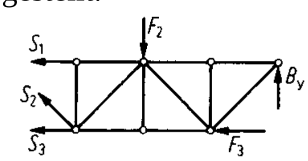
$M^{(A)}$: $-F_1 a - F_2 4a + B_y 6a - F_3 a = 0$.

Daraus folgt: $A_x = F_3$, $B_y = \dfrac{F_1}{6} + \dfrac{2}{3}F_2 + \dfrac{F_3}{6}$,

$$A_y = F_1 + F_2 - \left(\frac{F_1}{6} + \frac{2}{3}F_2 + \frac{F_3}{6}\right) = \frac{5}{6}F_1 + \frac{1}{3}F_2 - \frac{F_3}{6}.$$

Schritt 3: Linker und rechter Teil werden vollständig freigeschnitten und die Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt.





Es reichen beliebige *drei* von insgesamt sechs verfügbaren Gleichungen, da wir drei Reaktionen bereits kennen. Am sinnvollsten ist es, zwei Momentengleichungen bezüglich der Knoten und eine weitere beliebige Gleichung zu nehmen (in diesem Fall am besten in vertikaler Richtung).

Linker Teil:

$$M^{(I)}:\ -2aA_y + aF_1 + aS_3 = 0$$
$$y:\ A_y - F_1 - S_2\frac{\sqrt{2}}{2} = 0\,,$$

$$S_3 = 2A_y - F_1 = \left(\frac{5}{3}F_1 + \frac{2}{3}F_2 - \frac{F_3}{3}\right) - F_1$$

$$\boxed{S_3 = \frac{2}{3}F_1 + \frac{2}{3}F_2 - \frac{F_3}{3}}$$

$$\boxed{S_2 = \sqrt{2}\left(A_y - F_1\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{6}F_1 + \frac{1}{3}F_2 - \frac{F_3}{6}\right)}$$

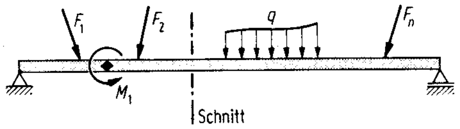
Rechter Teil:

$$M^{(II)}:\ aS_1 - aF_2 + 3aB_y = 0\,,$$

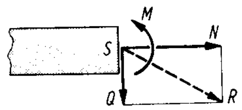
$$S_1 = F_2 - 3B_y = F_2 - \frac{F_1}{2} - 2F_2 - \frac{F_3}{2}$$

$$\boxed{S_1 = -\frac{F_1}{2} - F_2 - \frac{F_3}{2}}.$$

II. Schnittlasten (oder Schnittgrößen) bei Balken



Ein belasteter Balken wird durch innere Kräfte zusammengehalten. Diese werden "sichtbar" gemacht durch einen gedanklichen Schnitt durch den Balken und heißen daher *Schnittgrößen* oder *Schnittlasten*. Diese Schnittlasten sind nichts anderes als Reaktionskräfte, die ein Teil des Balkens auf den anderen ausübt. In jedem Balkenschnitt gibt es im Allgemeinen drei Reaktionen in zwei Dimensionen und sechs Schnittgrößen im dreidimensionalen Fall.



Definitionen und Zeichenvereinbarung

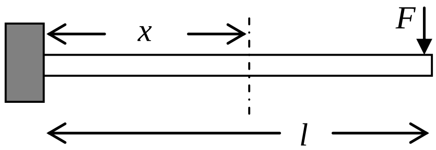
Die *Normalkraft* N ist eine in Richtung der Stabachse wirkende Kraft. Sie wird für den *linken* Teil *nach rechts* und für den rechten Teil nach links wirkend positiv angenommen.

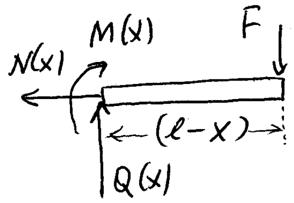
Die *Querkraft* Q ist eine senkrecht zur Stabachse wirkende Kraft. Sie wird für den *linken* Balkenteil *nach unten* und für den rechten teil nach oben wirkend positiv angenommen.

Das *Biegemoment* soll für den linken Teil entgegen dem Uhrzeigersinn und für den rechten Teil im Uhrzeigersinn drehend positiv angenommen.

Besteht bei einer komplizierteren Struktur eine Verwechselungsgefahr, so wird "unten" an jeder Stelle willkürlich definiert und durch eine gestrichelte Linie gekennzeichnet.

B3.



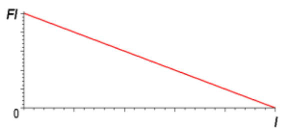


Drei Gleichgewichtsgleichungen:

$N(x) = 0$,

$Q(x) = F$,

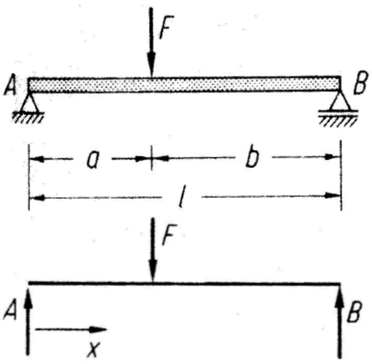
$M(x) = -F\cdot(l-x)$.



Verlauf des Biegemomentes:

Moment ist an der Einspannstelle maximal.

B4. Zu bestimmen sind die Schnittgrößen im unten gezeigten Balken.

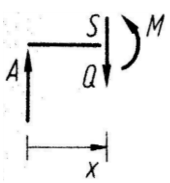


Lösung:
Wir betrachten drei Schnitte:

(**A**) Der ganze Balken freigeschnitten von den Lagern.
Daraus folgt:

$B = \frac{a}{l}F$, $A = \frac{b}{l}F$.

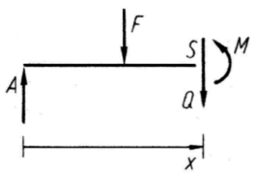
(**B**) Schnitt vor dem Angriffspunkt der Kraft.



$$A - Q = 0 \ \Rightarrow\ \boxed{Q = A = \frac{b}{l}F},$$

$$-xA + M = 0 \Rightarrow \boxed{M = xA = x\frac{b}{l}F}.$$

(**C**) Schnitt nach dem Angriffspunkt der Kraft:



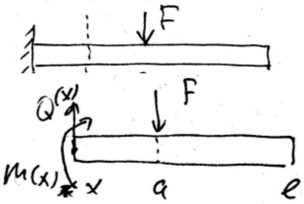
$$A - F - Q = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{Q = A - F = -\frac{a}{l}F},$$
$$-xA + F(x-a) + M = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{M = \left(1 - x/l\right)aF}.$$

Mechanik I / Prof. Popov / Vorlesung 9.
Schnittlasten im Balken unter Einzellasten (**<u>Auszüge</u> aus der Vorlesung**).
Literatur: ***Hauger, Schnell und Groß.*** **Technische Mechanik 1 (Statik), 7.2.1, 7.2.2.**

I. Schnittlasten im Balken bei Einzellasten

Es gibt nur wenige Möglichkeiten, einen Balken statisch bestimmt zu lagern: (a) einseitige Einspannung, (b) beidseitige gelenkige Lagerung, (c) Parallelführung an einem Ende plus gelenkige Lagerung am anderen. Belasten kann man entweder mit Einzelkräften oder Momenten. Im Weiteren betrachten wir typische Kombinationen aus Lagerungs- und Belastungsarten und berechnen für diese den Verlauf der Schnittlasten.

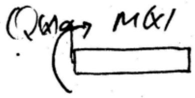
B1.



Wir schneiden frei einmal links vom Angriffspunkt der Kraft ($x<a$).
Die Gleichgewichtsbedingungen sind:

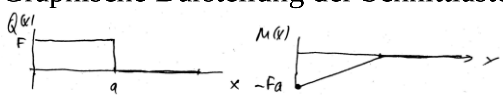
$$Q(x)-F=0 \;\Rightarrow\; \boxed{Q(x)=F}$$

$$-M(x)-F(a-x)=0 \;\Rightarrow\; \boxed{M(x)=F(x-a)}.$$



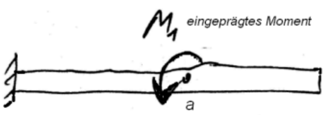
... und einmal rechts vom Angriffspunkt ($x>a$):
$\boxed{Q(x)=0}$, $\boxed{M(x)=0}$.

Graphische Darstellung der Schnittlasten:

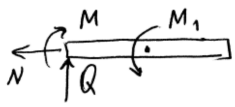


Im Angriffspunkt der Kraft gibt es einen Sprung der Querkraft um den Betrag der angreifenden Kraft.

B2.

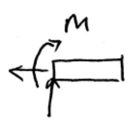


1. $x<a$:



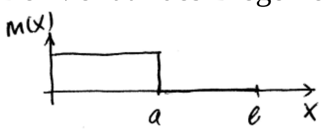
$$\boxed{N(x)=0,\; Q(x)=0,\; -M(x)+M_1=0.}$$

2. $x>a$:

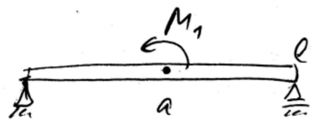


$$\boxed{\begin{array}{r} N(x)=0,\\ Q(x)=0,\\ M(x)=0. \end{array}}$$

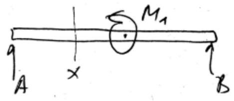
Der Verlauf des Biegemoments:



B3.



Zunächst schneiden wir den gesamten Balken frei:
Aus den Gleichgewichtsbedingungen folgt:

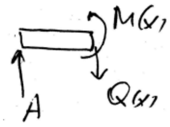


$$A+B=0 \;\Rightarrow\; A=-B.$$
$$Bl+M_1=0 \;\Rightarrow\; B=-M_1/l,\; A=M_1/l.$$

Dann schneiden wir bei x frei:

1. $x<a$:

$$A-Q(x)=0,$$
$$M(x)-Q(x)x=0.$$

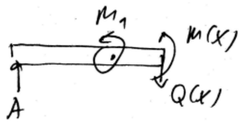


Aus der ersten Gleichung folgt: $\boxed{Q(x)=A}$.

Aus der zweiten folgt: $\boxed{M(x)=Ax=\frac{M_1}{l}x}$.

2. $x>a$:

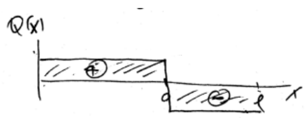
$$A-Q(x)=0$$
$$-Q(x)\cdot x+M(x)+M_1=0$$

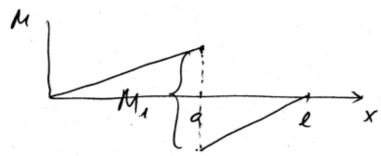


Aus der ersten Gleichung folgt: $\boxed{Q(x)=A}$.
Aus der zweiten folgt:

$$\boxed{M(x)=Q(x)x-M_1=\frac{M_1}{l}x-M_1}.$$

Grafische Darstellung der Schnittlasten:

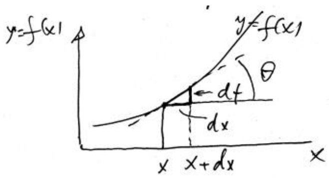




II. Ein bisschen Mathematik

1. Ableitung:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}.$$

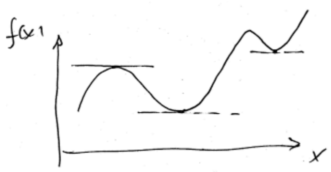


$\tan\theta = \dfrac{df}{dx}$:

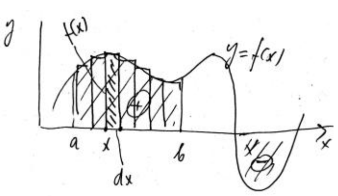
Geometrische Interpretation: *Ableitung zeigt die Steigung der Funktion im Punkt x.*

2. Maxima und Minima:

Im Maximum oder Minimum (kurz Extremum) ist $\dfrac{df}{dx} = 0$



3. Bestimmtes Integral:



Den Grenzwert der Summe

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

nennt man bestimmtes Integral der Funktion $f(x)$ nach *x*. *Geometrische Interpretation des Integrals: Flächeninhalt der Figur zwischen der Kurve* $f(x)$ *und der* $x-$*Achse von a bis b.*

4. Wie löst man Differentialgleichungen?

Gegeben seien zwei solche Funktionen $M(x)$ und $Q(x)$, sodass $\dfrac{dM(x)}{dx} = Q(x)$ gilt.

Ist $Q(x)$ bekannt und $M(x)$ zu bestimmen, so ist das eine Differentialgleichung. Zur Lösung schreiben wir sie zunächst in die folgende Form um: $dM(x) = Q(x)\,dx$. Dann integrieren wir entweder bestimmt oder unbestimmt.

(a) Bestimmte Integration:

$$\int_{x=a}^{x=b} dM(x) = \int_a^b Q(x)dx.$$

Wir berücksichtigen, dass

$\int_{x=a}^{x=b} dM(x) = M(b) - M(a)$ ist. Somit ist

$$\boxed{M(b) - M(a) = \int_a^b Q(x)dx}.$$

(Als Grenzen der Integration können auch Punkte innerhalb des Intervalls dienen).

(b) unbestimmte Integration:

$$\int dM(x) = \int Q(x)\,dx + C,$$

wobei *C* eine beliebige Konstante ist.

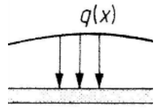
Wir berücksichtigen, dass $\int dM(x) = M(x)$ ist.

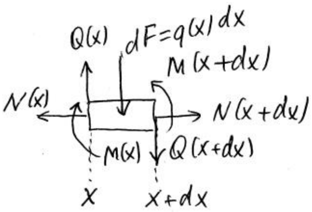
Somit gilt:

$$\boxed{M(x) = \int Q(x)\,dx + C}.$$

III. Zusammenhang zwischen Belastung und Schnittgrößen

Ein Balken sei durch eine Streckenlast $q(x)$ belastet. Wir schneiden einen infinitesimal kleinen Abschnitt des Balkens zwischen x und $x + dx$ frei:





Die Gleichgewichtsbedingungen liefern:

x:

$$N(x+dx) - N(x) = 0$$

y:

$$Q(x+dx) - Q(x) + q(x)\,dx = 0$$

$M^{(x+dx/2)}$:

$$-Q(x+dx)\frac{dx}{2} - Q(x)\frac{dx}{2} + M(x+dx) - M(x) = 0$$

Aus der ersten Gleichung folgt $N(x) = const$.

Die zweite kann in der Form

$$\frac{Q(x+dx) - Q(x)}{dx} = -q(x)$$

umgeschrieben werden. Das bedeutet:

$$\boxed{\frac{dQ(x)}{dx} = -q(x)}. \qquad (1)$$

Die dritte Gleichung kann in der Form

$$\frac{M(x+dx) - M(x)}{dx} = \frac{Q(x+dx) + Q(x)}{2}$$

umgeschrieben werden. Das bedeutet:

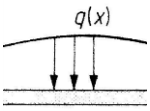
$$\boxed{\frac{dM(x)}{dx} = Q(x)}. \qquad (2)$$

(1) und (2) sind die **Schnittgrößendifferentialgleichungen**.

Differentialgleichungen für die Schnittlasten, Integration und Randbedingungen.

Literatur: ***Hauger, Schnell und Groß.*** **Technische Mechanik 1 (Statik), 7.2.2, 7.2.3, 7.2.4, 7.3.**

I. Zusammenhang zwischen Belastung und Schnittgrößen



Wird ein Balken durch eine Streckenlast $q(x)$ belastet, so gilt für die Querkraft $Q(x)$ und für das Biegemoment $M(x)$:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}Q(x)}{\mathrm{d}x} = -q(x)}, \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x} = Q(x)}. \qquad (1)$$

Indem man beide Gleichungen kombiniert,

erhält man $\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 M(x)}{\mathrm{d}x^2} = -q(x)}$. (2)

II. Integration und Randbedingungen

Ist die Belastung $q(x)$ gegeben, so kann man durch Lösung der Differentialgleichungen (1) und (2) die Schnittgrößen berechnen.
Integration von (1) ergibt:

$$Q(x) = -\int q(x)\mathrm{d}x + C_1 \qquad (3)$$

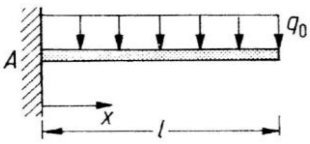
$$M(x) = \int Q(x)\mathrm{d}x + C_2 \qquad (4)$$

Die zwei *Integrationskonstanten* C_1 und C_2 werden aus den *Randbedingungen* ermittelt.

Lager	Q	M
gelenkiges Lager	$\neq 0$	0
Parallelführung	0	$\neq 0$
Schiebehülse	$\neq 0$	$\neq 0$
Einspannung	$\neq 0$	$\neq 0$
freies Ende	0	0

III. Beispiele

B1. Zu bestimmen sind die Schnittlasten im abgebildeten Balken.



Lösung: Aus Gleichung (3) folgt:

$$Q(x) = -\int q_0 \mathrm{d}x + C_1 = -q_0 x + C_1. \qquad (5)$$

Aus Gleichung (4) folgt:

$$M(x) = \int Q(x)\mathrm{d}x + C_2 = \int \left(-q_0 x + C_1\right)\mathrm{d}x + C_2$$
$$= -q_0 \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2. \qquad (6)$$

Die Konstanten C_1 und C_2 bestimmen wir aus den Randbedingungen (in diesem Fall am rechten Ende):

$Q(l) = 0$, $M(l) = 0$.

Einsetzen von $x = l$ in (5) und (6) ergibt:

$$\left.\begin{aligned} Q(l) &= -q_0 l + C_1 = 0 \\ M(l) &= -q_0 \frac{l^2}{2} + C_1 l + C_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

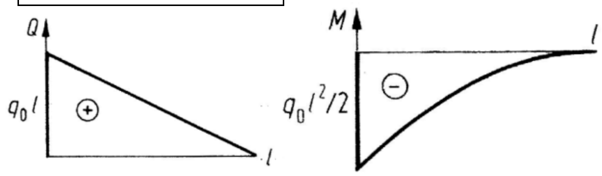
Daraus folgt:

$C_1 = q_0 l$, $C_2 = -\frac{q_0 l^2}{2}$.

$$\boxed{Q(x) = -q_0 x + C_1 = -q_0 x + q_0 l = q_0 \left(l - x\right)}$$

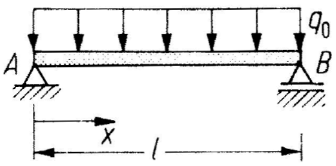
$$M(x) = -q_0 \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$
$$= -q_0 \frac{x^2}{2} + q_0 l x - \frac{q_0 l^2}{2} = -\frac{q_0}{2}\left(x^2 - 2lx + l^2\right)$$

$$\boxed{M(x) = -\frac{q_0}{2}\left(l - x\right)^2}.$$



B2. Zu bestimmen sind die Schnittlasten im unten abgebildeten Balken.

Lösung: Da die Last dieselbe ist wie im vorigen Beispiel, sind auch die Differentialgleichungen und ihre Lösungen dieselben (5) und (6). Der einzige Unterschied liegt in den Randbedingungen:



$M(0) = 0$, $M(l) = 0$ (wegen gelenkiger Lagerung). Einsetzen $x = 0$ und $x = l$ in (6) ergibt:

$M(0) = C_2 = 0$,

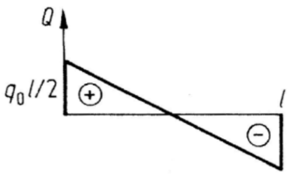
$$M(l) = -q_0 \frac{l^2}{2} + C_1 l + C_2 = 0.$$

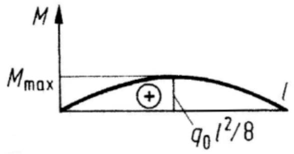
Aus der zweiten Gleichung folgt: $C_1 = q_0 \frac{l}{2}$.

Der Verlauf der Schnittlasten ist somit

$$\boxed{Q(x) = -q_0 x + q_0 \frac{l}{2} = q_0 \left(\frac{l}{2} - x\right)},$$

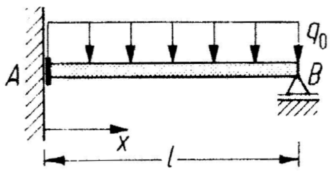
$$\boxed{M(x) = -q_0 \frac{x^2}{2} + q_0 \frac{l}{2} x = \frac{q_0}{2} x\left(l - x\right)}$$





B3. Zu bestimmen sind die Schnittlasten im unten abgebildeten Balken.

Lösung: Da die Last dieselbe ist wie im ersten



Beispiel, sind auch die Differentialgleichungen und ihre Lösungen dieselben (5) und (6). Der Unterschied liegt in den Randbedingungen:

$Q(0)=0$, $M(l)=0$.

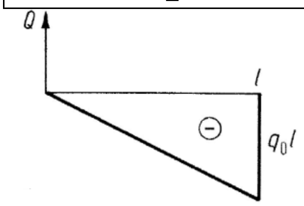
Einsetzen von $x=0$ in (5) und $x=l$ in (6) ergibt: $Q(0)=C_1=0$ und

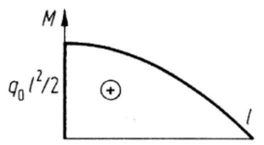
$$M(l)=-q_0\frac{l^2}{2}+C_2=0 \Rightarrow C_2=q_0\frac{l^2}{2}.$$

Der Verlauf der Schnittlasten ist somit

$\boxed{Q(x)=-q_0x+C_1=-q_0x}$,

$$\boxed{M(x)=-q_0\frac{x^2}{2}+C_2=q_0\frac{l^2}{2}-q_0\frac{x^2}{2}=\frac{q_0}{2}\left(l^2-x^2\right)}.$$





IV. Schnittlasten und Lagerreaktionen

Die Schnittlasten am linken Balkenende sind gleich den Lagerreaktionen:

$A=Q(0)$, $M^{(A)}=M(0)$.

Die Schnittlasten am rechten Balkenende sind gleich den Lagerreaktionen mit dem entgegengesetzten Vorzeichen:

$B=-Q(l)$, $M^{(B)}=-M(l)$

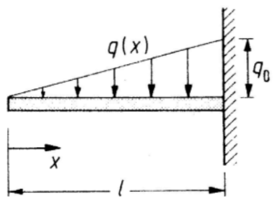
In den oben behandelten drei Aufgaben ist:

B1: $A=Q(0)=C_1=q_0l$, $M^{(A)}=-\frac{q_0}{2}l^2$.

B2: $A=Q(0)=q_0\frac{l}{2}$, $B=-Q(l)=q_0\frac{l}{2}$.

B3: $M^{(A)}=M(0)=\frac{q_0}{2}l^2$, $B=-Q(l)=q_0l$.

B4. Der einseitig eingespannte Balken trägt eine von einem Ende zum anderen linear steigende



Streckenlast. Zu bestimmen sind die Schnittgrößen.

Lösung: Die Streckenlast wird offenbar durch die Gleichung $q(x)=q_0x/l$ gegeben. Aus der Gleichung (3) folgt:

$$Q(x)=-\int q(x)\,dx+C_1=-(q_0/l)\int x\,dx+C_1$$

$$\boxed{Q(x)=-q_0\frac{x^2}{2l}+C_1}$$

Aus der Gleichung (4) folgt:

$$M(x)=\int Q(x)\,dx+C_2=\int\left(-q_0\frac{x^2}{2l}+C_1\right)dx+C_2$$

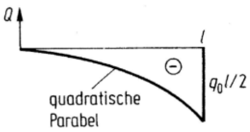
$$\boxed{M(x)=-q_0\frac{x^3}{6l}+C_1x+C_2}.$$

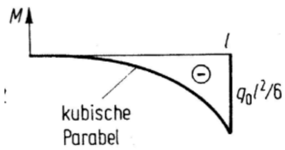
Aus den Randbedingungen

$Q(0)=0$, $M(0)=0$ folgt: $C_1=0$, $C_2=0$.

Der Verlauf der Schnittlasten:

$$\boxed{Q(x)=-q_0\frac{x^2}{2l}},\ \boxed{M(x)=-q_0\frac{x^3}{6l}}.$$



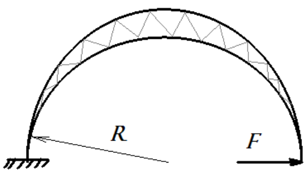


Lagerreaktionen:

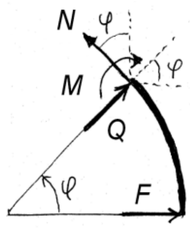
$$B=-Q(l)=\frac{q_0l}{2},\qquad M^{(B)}=-M(l)=q_0\frac{l^2}{6}$$

V. Bogen

Der Kreisbogenträger wird durch eine Einzelkraft belastet. Gesucht sind die Schnittlasten.



Lösung: Wir schneiden einen Teil des Bogens bis zum Winkel φ frei. Bedingungen für das Gleichgewicht:



$$\left.\begin{aligned} x&: -N\sin\varphi+Q\cos\varphi+F=0\\ y&: \quad N\cos\varphi+Q\sin\varphi=0\\ M^{(\varphi)}&: -M(\varphi)+FR\sin\varphi=0\end{aligned}\right\}$$

Daraus folgt:

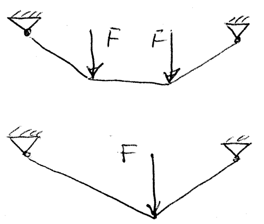
$$\boxed{M(\varphi)=FR\sin\varphi,\ Q(\varphi)=-F\cos\varphi,\ N(\varphi)=F\sin\varphi.}$$

B5. Erklären Sie, warum die Dachträger am Bahnhof Alexanderplatz in der Mitte dicker sind, als an den gelenkig gelagerten Enden (Bild links).

I. Seile und Ketten

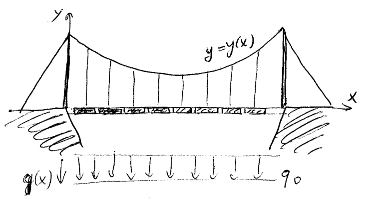
Neben starren Körpern werden als Lastaufnehmende Elemente oft auch Seile oder Ketten benutzt. Ein ideales Seil kann keinen Querkräften oder Biegemomenten widerstehen ($Q = 0, M = 0$). Die Schnittkräfte sind daher stets entlang der Biegelinie des Seils gerichtet.

Ketten kann man als eine Reihe von starren Stäben betrachten, die mit einander gelenkig verbunden sind. Die auf die Kette wirkenden Kräfte verteilen wir auf die benachbarten Knoten. Wie in einem idealen Fachwerk, wirken dann alle Stabkräfte in der Kette in der Richtung der Stabachse.

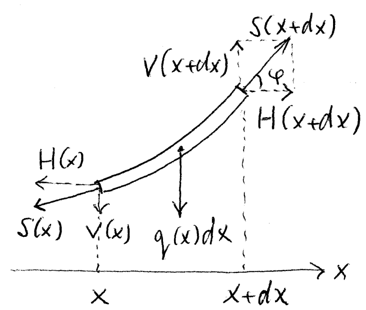


Trägt ein Seil vernachlässigbaren Gewichts mehrere Einzelkräfte, nimmt es die Form mehrerer geradliniger Stücke an.

II. Seil unter Wirkung einer Streckenlast



Greifen am Seil mehrere parallel gerichtete Kräfte, kann man es annähernd als kontinuierlich mit einer Streckenlast $q(x) = \mathrm{d}F / \mathrm{d}x$ belastet ansehen.



Betrachten wir ein infinitesimal kleines Element des Seils zwischen x und $x + \mathrm{d}x$. Die Spannkraft des Seils am rechten Ende des Elements bezeichnen wir mit $S(x + \mathrm{d}x)$, am linken Ende $S(x)$. Beide sind tangential zur Hängelinie des Seils gerichtet. Kräftegleichgewicht:

x: $\quad H(x + \mathrm{d}x) - H(x) = 0$,

y: $V(x + \mathrm{d}x) - V(x) - q(x)\mathrm{d}x = 0$.

Aus der ersten Gleichung folgt $H(x) = konst$, die wir als H bezeichnen: $H(x) = H$.

Die zweite Gleichung ergibt

$$\frac{V(x + \mathrm{d}x) - V(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x} = q(x) \qquad (1)$$

Das Momentengleichgewicht haben wir bereits früher benutzt. Aus ihm folgt, dass die Seilkräfte in der Seilrichtung wirken oder mathematisch ausgedrückt: $\dfrac{V(x)}{H(x)} = \tan\varphi = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Daraus folgt

$$V(x) = H(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = H\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}. \qquad (2)$$

Indem wir die Gleichung (2) in (1) einsetzen, erhalten wir $H\dfrac{d^2y}{dx^2} = q(x)$ oder

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{q(x)}{H}} \text{ oder } \boxed{y'' = \frac{q(x)}{H}}. \qquad (3)$$

Berechnen wir die Form des Seils bei einer konstanten Streckenlast $q(x) = q_0$, wie es annähernd bei einer Hängebrücke der Fall ist, gilt: $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{q_0}{H}$. Die erste Integration ergibt

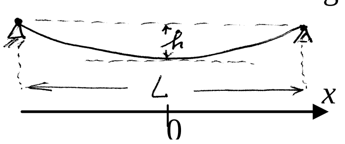
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \int \frac{q_0}{H}\mathrm{d}x + C_1 = \frac{q_0}{H}x + C_1.$$

Die zweite Integration ergibt

$$\begin{aligned} y(x) &= \int\left(\frac{q_0}{H}x + C_1\right)dx + C_2 \\ &= \frac{q_0}{H}\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2. \end{aligned} \qquad (4)$$

Die Konstanten C_1 und C_2 werden aus zusätzlichen geometrischen und anderen Bedingungen bestimmt.

B1. Gegeben seien die Länge der Hängebrücke L und der Durchhang h. Zu bestimmen ist die Form des Seils und die maximale Seilkraft.



Lösung: Zählen wir die Koordinate x von der Mitte der Brücke und y vom tiefsten Durchhangpunkt. Dann gilt: $y(0) = 0$, $y(-L/2) = h$ und $y(L/2) = h$. Einsetzen $x = 0$ in (4) ergibt $C_2 = 0$. Einsetzen $x = \pm L/2$ in (4) ergibt

$$y(-L/2) = \frac{q_0}{H}\frac{L^2}{8} - C_1\frac{L}{2} = h,$$

$$y(L/2) = \frac{q_0}{H}\frac{L^2}{8} + C_1\frac{L}{2} = h.$$

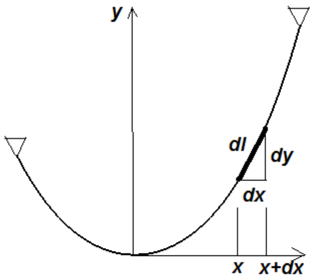
Daraus folgt $C_1 = 0$ und $h = \frac{q_0}{H}\frac{L^2}{8}$. Die Form des Seils ist somit $\boxed{y(x) = \frac{4hx^2}{L^2}}$.

Die horizontale Komponente der Seilkraft ist konstant und gleich $H = \frac{q_0}{h}\frac{L^2}{8}$. Die Seilkraft berechnen wir gemäß

$$\boxed{S = H\sqrt{1+y'^2} = \frac{q_0}{h}\frac{L^2}{8}\sqrt{1+\left(\frac{8hx}{L^2}\right)^2}}.$$

Sie erreicht ein Maximum in den Punkten $x = \pm L/2$: $\boxed{S_{\max} = \frac{q_0}{h}\frac{L^2}{8}\sqrt{1+\left(\frac{4h}{L}\right)^2}}$.

III. Seil unter Eigengewicht



Gegeben sei ein Seil mit konstanter linearer Massendichte $\mathrm{d}m/\mathrm{d}l = \lambda$. Schneiden wir ein infinitesimal kleines Element des Seils zwischen den Koordinaten x und $x+\mathrm{d}x$ frei. Auf dieses Element wirkt die Schwerekraft $dF = \mathrm{d}m \cdot g = \lambda \mathrm{d}l \cdot g \equiv q_0 \mathrm{d}l$, wobei wir die Bezeichnung $q_0 = \lambda g$ eingeführt haben. Bezogen auf das Intervall $\mathrm{d}x$ ergibt das die *Streckenlast* $q(x)$, die auf das Seil wirkt:

$$q(x) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = q_0 \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}x}.$$

Nach dem Pythagoras-Satz gilt

$$\mathrm{d}l = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \mathrm{d}x\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}.$$

Für die Streckenlast erhalten wir somit

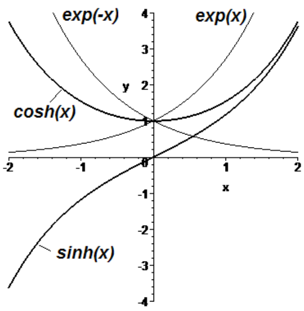
$$q(x) = q_0\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}.$$

Einsetzen in Gleichung (3) ergibt

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{q_0}{H}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}}. \qquad (5)$$

Die Form des Seils ergibt sich aus der Lösung dieser nicht linearen Differentialgleichung mit gegebenen geometrischen Randbedingungen.

IV. Ein bißchen Mathematik: Exponentialfunktion und hyperbolische Funktionen



Sinus Hyperbolicus und Kosinus Hyperbolicus werden definiert als

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Die so definierten Funktionen haben folgende Eigenschaften:

$$(\sinh x)' = \cosh x,$$

$$(\cosh x)' = \sinh x, \; \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

Warum heißen diese Funktionen Sinus und Kosinus und warum Hyperbolicus?

Hyperbolicus: Die normalen Sinus und Kosinus-Funktionen werden auch Kreisfunktionen genannt. Die Gleichungen $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$ definieren in parametrischer Form einen Kreis mit dem Radius $r = 1$. Das sieht man daran, dass $x^2 + y^2 = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ eine Kreisgleichung darstellt.

Die Gleichungen $x = \cosh\varphi$, $y = \sinh\varphi$ definieren in parametrischer Form eine *Hyperbel*. Das sieht man daran, dass $x^2 - y^2 = 1$ eine Hyperbelgleichung darstellt.

Sinus und *Kosinus:* Die sogenannte Eulersche Formel für imaginäre Exponente lautet:

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, wobei $i = \sqrt{-1}$

Daraus folgt $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$.

Summieren beider Gleichungen ergibt

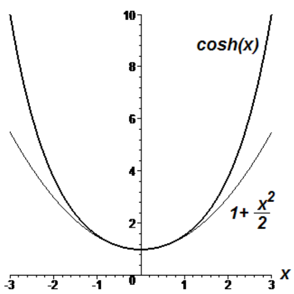
$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \cosh(i\varphi),$$

$$i\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2} = \sinh(i\varphi).$$

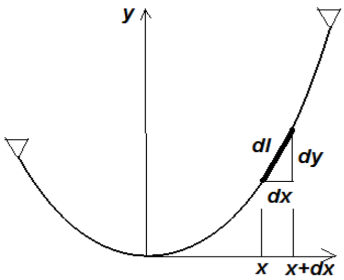
Umgekehrt gilt

$\cos(i\varphi) = \cosh\varphi$ und $\sin(i\varphi) = i\sinh(\varphi)$.

Dieser Zusammenhang von hyperbolischen und Kreisfunktionen erklärt die Namen Sinus und Kosinus in beiden Fällen. Auf dem nebenstehenden Bild können Sie den Verlauf einer Parabel und einer Kosinus Hyperbolicus-Kurve vergleichen.



I. Seil unter Eigengewicht



In der vorigen Vorlesung haben wir festgestellt, dass die Form $y = y(x)$ eines freihängenden homogenen Seils (oder einer Kette) der folgenden Differentialgleichung genügt (Kettengleichung):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q_0}{H}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad \text{oder} \quad y'' = \frac{q_0}{H}\sqrt{1+\left(y'\right)^2}\,.$$

Bezeichnen wir $y' = u$, dann gilt $y'' = u'$ und die Kettengleichung nimmt die Form

$$u' = \frac{q_0}{H}\sqrt{1+u^2} \quad \text{oder} \quad \frac{du}{dx} = \frac{q_0}{H}\sqrt{1+u^2} \text{ an.}$$

Trennung der Variablen ergibt

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{q_0}{H}dx\,.$$

Diese Gleichung kann nun integriert werden:

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{q_0}{H}dx + C_1 = \frac{q_0}{H}x + C_1\,.$$

Das Integral auf der linken Seite berechnen wir mit der Substitution $\left|\begin{array}{c} u = \sinh\varphi \\ du = \cosh\varphi\, d\varphi \end{array}\right|$:

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{\cosh\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1+\sinh^2\varphi}} = \int \frac{\cosh\varphi\, d\varphi}{\cosh\varphi} = \varphi\,.$$

Somit erhalten wir

$$\varphi = \frac{q_0}{H}x + C_1 \quad \Rightarrow \quad u = \sinh\left(\frac{q_0}{H}x + C_1\right).$$

Diese Gleichung schreiben wir in der Form

$$\frac{dy}{dx} = \sinh\left(\frac{q_0}{H}x + C_1\right)$$

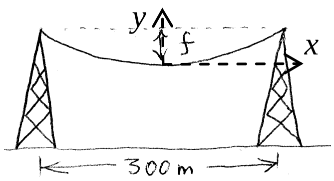
Integration ergibt

$$y(x) = \int \sinh\left(\frac{q_0}{H}x + C_1\right)dx + C_2 \quad \text{oder}$$

$$\boxed{y(x) = \frac{H}{q_0}\cosh\left(\frac{q_0}{H}x + C_1\right) + C_2} \qquad (1)$$

Die Form eines frei hängenden Seils oder einer frei hängenden Kette wird durch einen Kosinus Hyperbolicus beschrieben (*Kettenlinie*).

B1. Ein Kabel ($q_0 = 120N/m$) soll zwischen zwei Masten im Abstand $l = 300m$ so aufgehängt werden, dass der Durchhang $f = 60m$ beträgt. Wie groß sind die maximale Seilkraft und die Seillänge L?



Lösung: Wir legen das Koordinatensystem so, daß der Koordinatenursprung mit dem tiefsten Punkt des Seils zusammenfällt. Dann gilt:

$$y'(0) = \sinh C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$$

und

$$y(0) = \frac{H}{q_0}\cosh 0 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -\frac{H}{q_0}\,.$$

Die Form des Kabels ist

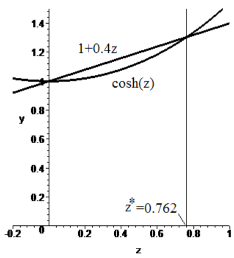
$$y(x) = \frac{H}{q_0}\cosh\left(\frac{q_0}{H}x\right) - \frac{H}{q_0} = \frac{H}{q_0}\left[\cosh\left(\frac{q_0}{H}x\right) - 1\right].$$

Die unbekannte Konstante H folgt aus der Forderung $y(l/2) = f$:

$$\frac{H}{q_0}\left(\cosh\left(\frac{q_0 l}{2H}\right) - 1\right) = f$$

$$\text{oder} \quad \boxed{\cosh\left(\frac{q_0 l}{2H}\right) - 1 = \left(\frac{q_0 l}{2H}\right)\frac{2f}{l}}. \qquad (2)$$

Indem wir einen neuen Parameter $z = \left(\frac{q_0 l}{2H}\right)$



einführen, erhalten wir $\cosh z - 1 = 2zf\,/\,l$.
Mit $f\,/\,l = 60/300 = 2/5$ folgt $\cosh z - 1 = \frac{4}{5}z$.

Numerische oder grafische Lösung dieser Gleichung ergibt: $z^* = 0{,}762 \Rightarrow \frac{q_0 l}{2H} = 0{,}762 \Rightarrow$

$$H = \frac{q_0 l}{2\cdot 0{,}762} = \frac{120\cdot 300}{2\cdot 0{,}762} = 23{,}6\cdot 10^3 N = 23{,}6kN.$$

Die Seilkraft errechnet sich zu $S = H\sqrt{1+y'^2}$.
Sie nimmt den maximalen Wert bei $x = \pm l/2$ an: $S = H\sqrt{1+\sinh^2\left(\frac{q_0}{H}\frac{l}{2}\right)} = H\cosh\left(\frac{q_0}{H}\frac{l}{2}\right)$.

Aus (2) folgt, dass $\cosh\left(\frac{q_0}{H}\frac{l}{2}\right) = 1 + \frac{q_0 f}{H}$ ist.

Für die Seilkraft ergibt sich

$$S = H\cosh\left(\frac{q_0}{H}\frac{l}{2}\right) = H + q_0 f = 30{,}8kN\,.$$

Die Länge des Kabels berechnet sich zu

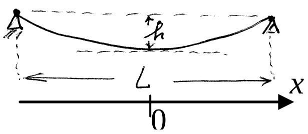
$$L = 2\int_0^{l/2} \sqrt{1+y'(x)^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{l/2} \cosh\left(\frac{q_0}{H}x\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2H}{q_0}\sinh\left(\frac{q_0}{H}x\right)\Bigg|_0^{l/2} = \frac{2H}{q_0}\sinh\left(\frac{q_0 l}{2H}\right) =$$

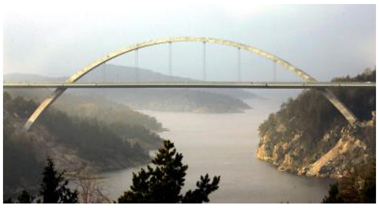
$$= \frac{2\cdot 23{,}6\cdot 10^3}{150}\sinh(0{,}762) \approx 330m$$

II. Momentenfreie Bögen

Ein Seil kann keinen Biegemomenten widerstehen. Seine Gleichgewichtsform gibt daher die Form eines *momentenfreien Bogens*, welcher auf Zug beansprucht ist, an. In der vorigen Vorlesung haben wir die

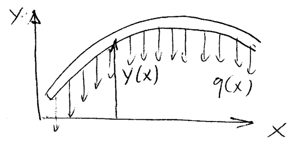


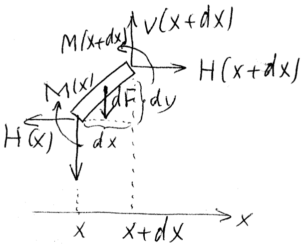
Form eines Brückenseils zu $y = \frac{4hx^2}{L^2}$ berechnet. *Sie hängt nicht von der Größe der Streckenlast* q_0 *ab!* Bei einer beliebigen homogenen Änderung der Streckenlast ($q_0 = konst$) behält das Seil die gleiche Form und bleibt momentenfrei. Das gilt auch für *negative* q_0.



In diesem Fall haben wir es mit einem *momentenfreien Bogen* zu tun, welcher auf Druck beansprucht ist. In der Baustatik nennt man diese Form *Stützlinie.*

III. Schnittgrößen bei Bögen





Gegeben sei ein gebogener Balken (Bogen), dessen Form durch die Funktion $y = y(x)$ gegeben ist.

Auf ihn wirke in vertikaler Richtung eine Streckenlast $q(x)$.

Zu bestimmen ist der Verlauf des Biegemomentes im Bogen.

Lösung: Wir schneiden ein infinitesimal kleines Element des Bogens frei. Aus dem Kräftegleichgewicht in horizontaler Richtung folgt

$$H(x+\mathrm{d}x) = H(x) \Rightarrow \boxed{H(x) = konst = H}. \quad (3)$$

Gleichgewicht in vertikaler Richtung ergibt

$V(x+\mathrm{d}x) - V(x) - q(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Daraus folgt

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x} = q(x)}. \quad (4)$$

Das Momentengleichgewicht lautet

$M(x+\mathrm{d}x) - M(x) - H\mathrm{d}y + V\mathrm{d}x = 0$ oder

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}M(x)}{dx} = -V(x) + H\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}. \quad (5)$$

Integration von (4) und Einsetzen in (5) ergibt

$$V(x) = \int q(x)\mathrm{d}x + C_1$$

$$\frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x} = -\int q(x)\mathrm{d}x + H\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - C_1 \quad (6)$$

B2. Die Form des Trägers sei $y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, die Streckenlast sei konstant mit $q(x) = q_0$. An den Rändern sei er gelenkig gelagert.

Lösung: Integration von (6) ergibt

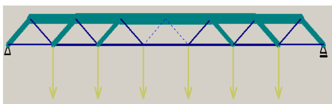
$$M(x) = -\frac{q_0 x^2}{2} + Hy(x) - C_1 x + C_2.$$

Falls wir den Koordinatenursprung in der Mitte des Trägers wählen, wird $C_1 = 0$. Aus der Randbedingung $M(R) = 0$ ergibt sich $C_2 = q_0 R^2/2$. Der Momentenverlauf lautet

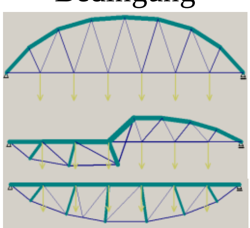
$$\boxed{M(x) = q_0(R^2 - x^2)/2 + H\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

IV. Fachwerkoptimierung

Eine Brücke ist so zu optimieren, dass sie minimales Eigengewicht hat.



Lösung: Indem wir die Knoten verschieben, ändern wir die Länge der Stäbe. Außerdem kann der Querschnitt geändert werden. Nehmen wir an, alle Stäbe haben einen runden Querschnitt. Dann haben wir für das skizzierte Fachwerk 20 Knotenkoordinaten und 27 Radien als frei wählbare Parameter. Bei jeder Wahl bekommen wir einen Satz von Stabkräften. Die Zugkräfte müssen die Bedingung $F < \pi a^2 \sigma_{pl}$ und die Druckkräfte die Bedingung $|F| < \pi^2 E a^4 / l^2$ erfüllen. Das Gesamtgewicht des Fachwerkes $M = \rho \sum l_i \pi a^2$ ist zu minimieren. Mögliche optimierte Formen:

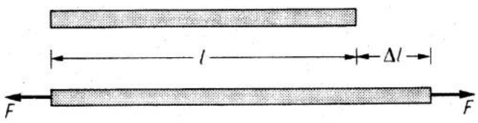


Zug und Druck in Stäben, Hookesches Gesetz

Literatur: *Hauger, Schnell und Groß.* Technische Mechanik 2 (Elastostatik), 1.1-1.3.

I. Das Hookesche Gesetz

Ziehen wir an den Enden eines Stabes mit einer Kraft *F*, so nimmt die Länge um einen Betrag Δl zu. Wir werden annehmen, dass die Längenänderung ein kleiner Bruchteil der ursprünglichen Länge ist. Für eine große Anzahl von Materialien zeigen die Experimente, dass



bei genügend kleinen Dehnungen die Kraft proportional zur Verlängerung ist: $F \propto \Delta l$.

Diese Relation ist als *Hookesches Gesetz* bekannt. Solche Stoffe werden *linear elastisch* genannt.

II. Dehnung

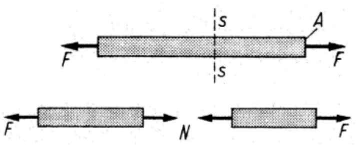
Die Verlängerung Δl des Stabes hängt auch von seiner Länge ab. Um eine Größe zu erhalten, die für das Material und nicht für seine Form charakteristisch ist, verwenden wir das Verhältnis $\Delta l / l$ zwischen der Verlängerung und der ursprünglichen Länge. Dieses Verhältnis heißt

Dehnung: $\varepsilon = \Delta l / l$. (dimensionsfreie Größe)

Die Dehnung ist proportional zur Kraft, aber unabhängig von *l*: $F \propto \varepsilon$.

III. Spannung

Bei der gegebenen Dehnung wirkt in jedem Querschnitt des Stabes eine Normalkraft N.



Sie hängt u.a. vom Flächeninhalt *A* des Querschnitts des Stabes ab. Die Kraft für eine vorgegebene Verlängerung muss proportional zur Querschnittsfläche *A* des Stabes sein. Die "Beanspruchungsintensität" wird somit nicht durch die Kraft, sondern durch das Verhältnis der Kraft zur Fläche (Spannung) charakterisiert:

Spannung: $\sigma = N / A$ (Einheit: N/m^2=Pa)

Die Spannung hat dieselbe Einheit wie Druck. Zur Orientierung: Atmosphärischer Druck= $0{,}1\text{MPa}$, Fließgrenze von Stählen: $\sigma_{fließ} = 200 \div 1000$ MPa, für temperiertes Kupfer ist dagegen ca. $\sigma_{fließ} \approx 1\text{MPa}$.

IV. Elastizitätsmodul

Der Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung hängt weder von der Länge noch vom Querschnitt des Stabes, sondern nur vom Material ab und wird durch das lineare Gesetz

$\sigma = E\varepsilon$ (*Hookesches Gesetz*)

charakterisiert.

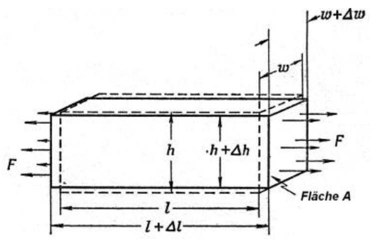
E ist *Elastizitätsmodul.* (Einheit: N/m^2=Pa)

Merken Sie sich den Elastizitätsmodul von Stahl:

$E_{Stahl} \approx 210\ \text{GPa} = 2{,}1 \cdot 10^{11}\ \text{Pa}.$

V. Poisson-Zahl (Querkontraktionszahl)

Betrachten wir einen rechteckigen Block aus



einem Material mit der Länge *l*, der Breite *w* und der Höhe *h*. Wird der Block in einer Richtung gedehnt, so zieht er sich rechtwinklig zur Kraft zusammen. Die Kontraktion in der Breite ist proportional zur Breite *w* und zur Dehnung $\Delta l / l$. Die Querkontraktion erfolgt sowohl für die Breite als auch für die Höhe in derselben Proportion und wird gewöhnlich als

$$\frac{\Delta w}{w} = \frac{\Delta h}{h} = -\nu \frac{\Delta l}{l}$$

Geschrieben. Die Konstante

ν ist *Poissonsche Zahl* oder auch *Querkontraktionszahl*. (dimensionsfreie Größe)

Merken Sie sich, dass bei den meisten Metallen die Poisson-Zahl ungefähr gleich 1/3 ist ($\nu = 0.3 - 0.36$). Bei einer Deformation *ohne Volumenänderung* (inkompressibel) ist $\nu = 1/2$. Für Gummi gilt $\nu \approx 1/2$.

VI. Wärmeausdehnungskoeffizient.

Dehnungen werden nicht nur durch Kräfte, sondern auch durch Temperaturänderungen hervorgerufen. Bei einer kleinen Temperaturänderung ΔT kann man annehmen, dass die Wärmedehnung ε_T proportional zu ΔT ist:

$\varepsilon_T = \alpha_T \Delta T$.

α_T ist *Wärmeausdehnungskoeffizient.* (Einheit: 1/K bzw. $1/°C$). [K=Kelvin=1°C]

Der Wärmeausdehnungskoeffizient bei Stählen liegt bei $\alpha_T \approx 1{,}2\cdot 10^{-5}$ 1/°C.

Wird eine Spannung σ angelegt und gleichzeitig die Temperatur um ΔT geändert, so werden beide Dehnungen addiert (Superpositionsprinzip): $\boxed{\varepsilon_{ges} = \varepsilon_{mech} + \varepsilon_{therm} = \dfrac{\sigma}{E} + \alpha_T \Delta T}$.

VII. Dehnsteifigkeit

Schreibt man das Hookesche Gesetz in der Form

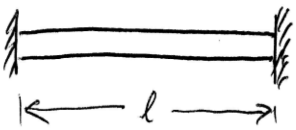
$$\frac{F}{A} = E\frac{\Delta l}{l}$$

folgt, dass die Kraft proportional zur Längenänderung ist:

$$\boxed{F = \left(\frac{EA}{l}\right)\Delta l = c\Delta l}$$

Die Konstante c nennt man die *Steifigkeit* des Stabes: $c = EA/l$. Das Produkt EA wird *als Dehnsteifigkeit* bezeichnet.

B1. Eine stählerne Stange (Länge $l = 1$ m, Querschnitt $A = 1\text{cm}^2$) wird zwischen zwei starren Wänden geklemmt und um 100°C erwärmt. Zu bestimmen ist die Druckspannung und die Druckkraft in der Stange.



Lösung: Bezeichnen wir die in der Stange wirkende Spannung als σ. Die Dehnung unter der Wirkung dieser Spannung und der Temperaturänderung ist gleich

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha_T \Delta T\,.$$

Da die Stange sich nicht dehnen kann, ist $\varepsilon = 0$: $\dfrac{\sigma}{E} + \alpha_T \Delta T = 0$.

Daraus folgt $\boxed{\sigma = -E\alpha_T \Delta T}$.

Mit $E = 2{,}1\cdot 10^{11}$ Pa und $\alpha_T \approx 1{,}2\cdot 10^{-5}$ 1/K erhalten wir

$$\sigma = -2{,}1\cdot 10^{11}\,\text{Pa}\cdot 1{,}2\cdot 10^{-5}\,\text{K}^{-1}\cdot 100\,\text{K}$$

$$= -2{,}5\cdot 10^{8}\,\text{Pa} = -250\,\text{MPa}$$

Das negative Vorzeichen zeigt, dass es sich um eine *Druck*spannung handelt. Die Normalkraft ist gleich

$$N = \sigma A = -250\,\text{MPa}\cdot 10^{-4}\,\text{m}^2 = -25\,\text{kN}$$

B2. An einem Draht (Länge 1m, Querschnitt 1mm^2) hängt ein Gewicht 100kg. Wie groß ist die Dehnung des Drahtes? Kann der Draht diese Last aushalten?

Lösung: Wir benutzen das Hookesche Gesetz in der Form $F = \left(\dfrac{EA}{l}\right)\Delta l$. Daraus folgt

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} = \frac{mgl}{EA} = \frac{100\cdot 9{,}8\cdot 1}{2{,}1\cdot 10^{11}\cdot 1\cdot 10^{-6}}$$

$$= 4{,}7\cdot 10^{-3}\,\text{m} = 4{,}7\,\text{mm}$$

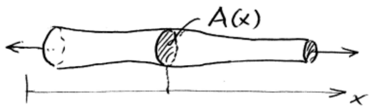
Die Spannung ist

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{100\cdot 9{,}8}{10^{-6}} = 980\,\text{MPa}\,.$$

Nur hochfeste Stähle können solche Spannungen aushalten. Normalerweise wird sich der Draht plastisch deformieren und reißen.

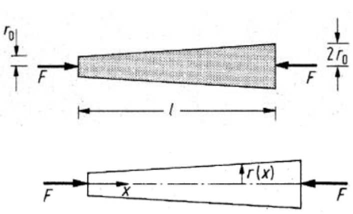
VIII. Ein Stab mit einem veränderlichen Querschnitt

Alle oben gegebene Definitionen sind nur im Fall eines langen, homogenen Stabes gültig. Man kann sie aber auch dann als eine gute Näherung benutzen, wenn der Querschnitt des Stabes nur *schwach veränderlich* ist. In diesem Fall kann man die Normalspannung im Querschnitt mittels folgender Formel bestimmen:



$$\boxed{\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)}}$$

B3. Ein konischer Stab (Länge l) mit kreisförmigem Querschnitt (Endradien r_0 und $2r_0$) wird durch eine Druckkraft F belastet. Zu bestimmen sind die Normalspannung $\sigma(x)$ im beliebigen Querschnitt.

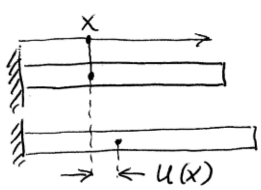


Lösung: Der Radius als Funktion der Längskoordinate x ist $r(x) = r_0\left(1 + x/l\right)$.

Die Querschnittsfläche ist $A(x) = \pi r^2(x)$.

Die Normalkraft ist $N = -F$. Die Normalspannung ist: $\boxed{\sigma(x) = \dfrac{N}{A(x)} = -\dfrac{F}{\pi r_0^2\left(1 + x/l\right)^2}}$.

IX. Nicht gleichmäßig deformierter Stab.

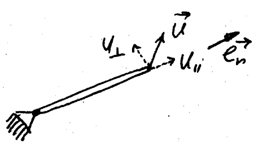


Einen nicht gleichmäßig deformierten Stab kann man durch die Verschiebung $u(x)$ des Punktes mit der *Anfangskoordinate* x charakterisieren. Es gilt: $\boxed{\varepsilon = \dfrac{du(x)}{dx}}$.

Statisch bestimmte und statisch unbestimmte elastische Stabsysteme

Literatur: ***Hauger, Schnell und Groß.*** **Technische Mechanik 2 (Elastostatik), 1.5,1.6.**

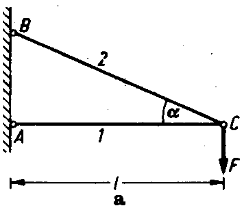
I. Hilfsaufgabe Ein elastischer Stab sei an einem Ende in einem Festlager befestigt. Das andere Ende wird aus der Anfangslage um den Vektor $\vec{u}$ verschoben. Wie ändert sich die Länge des Stabes?



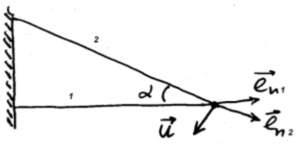
Lösung: Wenn die Verschiebung klein ist, so verursacht nur die Komponente der Verschiebung in der Stabrichtung eine Längenänderung: $\Delta l = u_{\|}$. Wenn wir einen Einheitsvektor $\vec{e}_n$ in der Stabrichtung einführen, kann man auch schreiben $\boxed{\Delta l = \vec{u} \cdot \vec{e}_n}$

II. Statisch bestimmtes Stabwerk 1

Zwei Stäbe mit der gleichen Dehnsteifigkeit *EA* sind gelenkig gelagert und mit einander verbunden, wie im Bild gezeigt. Gesucht ist die Verschiebung des Knotens *C*.



Bezeichnen wir die Verschiebung des Knotens mit $\vec{u} = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y$ und bestimmen die Einheitsvektoren in der Richtung des ersten und des zweiten Stabes:



$\vec{e}_{n1} = \vec{e}_x$, $\vec{e}_{n2} = \cos\alpha\, \vec{e}_x - \sin\alpha\, \vec{e}_y$.

Die Längenänderungen der Stäbe sind dann

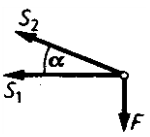
$$\Delta l_1 = \vec{u} \cdot \vec{e}_{n1} = \left(u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y\right) \cdot \vec{e}_x = u_x ,$$

$$\Delta l_2 = \vec{u} \cdot \vec{e}_{n2} = \left(u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y\right) \cdot \left(\cos\alpha\, \vec{e}_x - \sin\alpha\, \vec{e}_y\right) = u_x \cos\alpha - u_y \sin\alpha$$

Die Stabkräfte sind somit

$$S_1 = \frac{EA}{l_1} \Delta l_1 = \frac{EA}{l_1} u_x , \qquad (1)$$

$$S_2 = \frac{EA}{l_2} \Delta l_2 = \frac{EA}{l_2} \left(u_x \cos\alpha - u_y \sin\alpha\right). \qquad (2)$$



Die Gleichgewichtsbedingungen lassen sich in der Form schreiben:

x: $-S_2 \cos\alpha - S_1 = 0$,

y: $S_2 \sin\alpha - F = 0$.

Einsetzen von (1) und (2) und Berücksichtigung, dass $l_2 = l_1 / \cos\alpha$, führt zum Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} -\frac{EA}{l_1} \cos\alpha \left(u_x \cos\alpha - u_y \sin\alpha\right) \cos\alpha - \frac{EA}{l_1} u_x &= 0 \\ \frac{EA}{l_1} \cos\alpha \left(u_x \cos\alpha - u_y \sin\alpha\right) \sin\alpha - F &= 0 \end{aligned}\right\}$$

oder

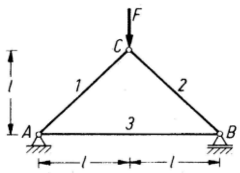
$$\left.\begin{aligned} u_x \left(1 + \cos^3\alpha\right) - u_y \sin\alpha \cos^2\alpha &= 0 \\ u_x \sin\alpha \cos^2\alpha - u_y \sin^2\alpha \cos\alpha &= \frac{F l_1}{EA} \end{aligned}\right\}$$

Daraus folgt

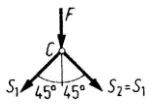
$$\boxed{\begin{aligned} u_x &= -\frac{F l_1}{EA} \frac{1}{\tan\alpha} \\ u_y &= -\frac{F l_1}{EA} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{1 + \cos^3\alpha}{\sin\alpha \cos^2\alpha} = -\frac{F l_1}{EA} \frac{1 + \cos^3\alpha}{\sin^2\alpha \cos\alpha} \end{aligned}}$$

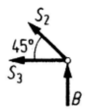
III. Statisch bestimmtes Stabwerk 2

Ein Fachwerk, das aus drei Stahlstäben besteht, wird durch die Kraft $F = 20\,\mathrm{kN}$ belastet. Wie groß müssen die Querschnittsflächen mindestens sein, wenn die Spannungen nicht größer als $\sigma_{zul} = 150\,\mathrm{MPa}$ und die Verschiebung des Lagers B kleiner als $0{,}05\%$ der Länge des Stabes 3 sein sollen?



Lösung: Da das Stabwerk statisch bestimmt ist, kann man die Stabkräfte direkt aus den Gleichgewichtsbedingungen bestimmen:





$$S_1 = S_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} F , S_3 = \frac{F}{2} .$$

Damit die zulässige Spannung nicht überschritten wird, muss gelten:

$$\left|\sigma_1\right| = \frac{\left|S_1\right|}{A_1} \le \sigma_{zul} , \left|\sigma_2\right| = \frac{\left|S_2\right|}{A_2} \le \sigma_{zul} , \left|\sigma_3\right| = \frac{\left|S_3\right|}{A_3} \le \sigma_{zul}$$

Daraus folgt für die mindestens erforderlichen Querschnittsflächen

$$A_1 = A_2 = \frac{\left|S_1\right|}{\sigma_{zul}} = \frac{0{,}707 \cdot 20 \cdot 10^3}{150 \cdot 10^6} \mathrm{m}^2 \approx 94{,}3\,\mathrm{mm}^2$$

$$A_3 = \frac{\left|S_3\right|}{\sigma_{zul}} = \frac{0{,}5 \cdot 20 \cdot 10^3}{150 \cdot 10^6} \mathrm{m}^2 \approx 66{,}7\,\mathrm{mm}^2 .$$

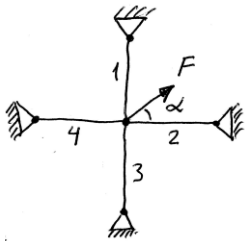
Damit die Verschiebung von Punkt B kleiner als $0{,}05\%$ der Länge des Stabes 3 ist, muss außerdem für den Stab 3 die Forderung

$$\frac{|\Delta l_3|}{l_3} = \frac{|S_3|}{EA_3} \le 0{,}05\% = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$$ und damit

$$A_3 \ge \frac{0{,}5 \cdot 20 \cdot 10^3}{2{,}1 \cdot 10^{11} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3}}\,\mathrm{m}^2 \approx 95\,\mathrm{mm}^2$$

erfüllt sein

IV. Statisch unbestimmtes Stabwerk 1



Gegeben sind die Steifigkeiten c der Stäbe. Zu berechnen ist die Verschiebung des Knotens.

Lösung: Wir führen den Verschiebungsvektor und die Einheitsvektoren ein:

$$\vec{u} = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y,$$

$$\vec{e}_1 = -\vec{e}_y, \qquad \vec{e}_2 = -\vec{e}_x,$$

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_y, \qquad \vec{e}_4 = \vec{e}_x.$$

Die Längenänderungen und die Stabkräfte sind damit durch

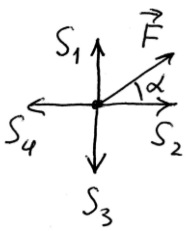
$$\Delta l_1 = \vec{u} \cdot \vec{e}_1 = -u_y, \quad S_1 = c\Delta l_1 = -cu_y$$

$$\Delta l_2 = \vec{u} \cdot \vec{e}_2 = -u_x, \quad S_2 = c\Delta l_2 = -cu_x$$

$$\Delta l_3 = \vec{u} \cdot \vec{e}_3 = u_y, \quad S_3 = c\Delta l_3 = cu_y$$

$$\Delta l_4 = \vec{u} \cdot \vec{e}_4 = u_x, \quad S_4 = c\Delta l_4 = cu_x$$

gegeben. Das Kräftegleichgewicht erfordert



x: $\quad S_2 - S_4 + F\cos\alpha = 0$

$\Rightarrow -cu_x - cu_x + F\cos\alpha = 0$

y: $\quad S_1 - S_3 + F\sin\alpha = 0$

$\Rightarrow -cu_y - cu_y + F\sin\alpha = 0$

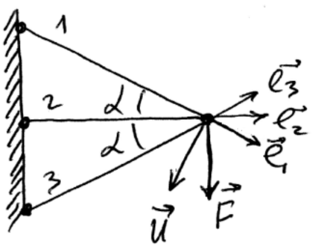
Der Verschiebungsvektor $\vec{u}$ ist damit:

$$\left.\begin{aligned} u_x &= \frac{F}{2c}\cos\alpha = \frac{F_x}{2c} \\ u_y &= \frac{F}{2c}\sin\alpha = \frac{F_y}{2c} \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\vec{u} = \frac{\vec{F}}{2c}}$$

V. Statisch unbestimmtes Stabwerk 2

Gegeben: *l*, *EA*, *F*.

Gesucht: Stabkräfte, Verschiebungen



Lösung:

$$\vec{e}_1 = \cos\alpha\,\vec{e}_x - \sin\alpha\,\vec{e}_y$$

$$\vec{e}_2 = \vec{e}_x$$

$$\vec{e}_3 = \cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_y$$

Die Längenänderungen sind analog zu den vorherigen Beispielen

$$\Delta l_1 = \vec{u} \cdot \vec{e}_1 = u_x \cos\alpha - u_y \sin\alpha,$$

$$\Delta l_2 = \vec{u} \cdot \vec{e}_2 = u_x,$$

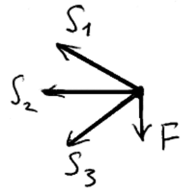
$$\Delta l_3 = \vec{u} \cdot \vec{e}_3 = u_x \cos\alpha + u_y \sin\alpha.$$

Für die Stabkräfte ergibt sich

$$S_1 = c_1 \Delta l_1 = c_1\left(u_x \cos\alpha - u_y \sin\alpha\right),$$

$$S_2 = c_2 \Delta l_2 = c_2 u_x,$$

$$S_3 = c_3 \Delta l_3 = c_3\left(u_x \cos\alpha + u_y \sin\alpha\right).$$



Diese müssen noch die Gleichgewichtsbedingungen

x: $\; -S_1\cos\alpha - S_2 - S_3\cos\alpha = 0$

y: $\; S_1\sin\alpha - S_3\sin\alpha - F = 0$

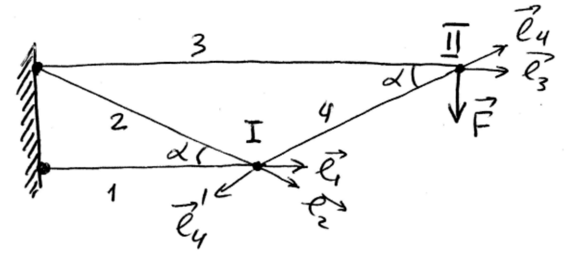
erfüllen. Das führt schließlich auf das Gleichungssystem für die gesuchten Verschiebungen:

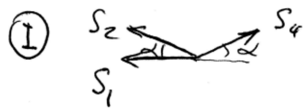
$$\begin{aligned} &-c_1\left(u_x\cos\alpha - u_y\sin\alpha\right)\cos\alpha - c_2 u_x \\ &-c_3\left(u_x\cos\alpha + u_y\sin\alpha\right)\cos\alpha = 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

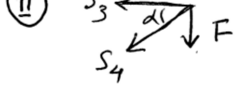
$$\begin{aligned} &c_1\left(u_x\cos\alpha - u_y\sin\alpha\right)\sin\alpha \\ &-c_3\left(u_x\cos\alpha + u_y\sin\alpha\right)\sin\alpha - F = 0 \end{aligned} \qquad (4)$$

VI. Statisch bestimmtes Stabwerk 3

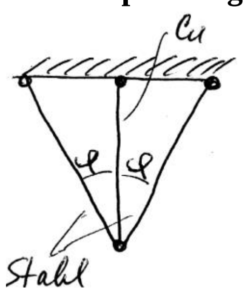
Zu bestimmen sind die Verschiebungen beider Knoten







VII. Statisch unbestimmtes Stabwerk mit Wärmespannungen



$$\alpha(Stahl) = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\,1/\mathrm{K}$$

$$\alpha(Cu) = 1{,}7 \cdot 10^{-5}\,1/\mathrm{K}$$

$$\Delta T = 100\,\mathrm{K}.$$

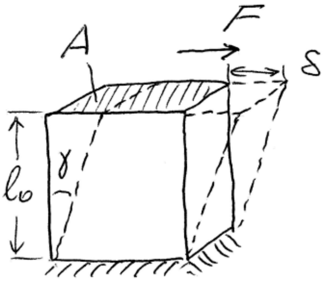
Zu bestimmen sind die thermischen Spannungen.

Mechanik I / Prof. Popov / Vorlesung 15. **Teil 2: Elastostatik**

Schubspannung, Scherdeformation. Der Torsionsstab.

Literatur: *Hauger, Schnell und Groß.* Technische Mechanik 2 (Elastostatik), 5.1.

I. Reine Scherung (oder Scherdeformation)



Scherdeformation ≡

$$\frac{\delta}{l_0} = \tan\gamma \approx \gamma + \frac{\gamma^3}{3} .. \approx \gamma$$

γ heißt *Schub*- oder *Gleitwinkel.*

Schubspannung

$$\tau = \frac{F}{A}.$$

Das Hookesche Gesetz für die Scherung:

$$\tau = G\gamma$$

G heißt *Schubmodul*. Er hängt mit dem Elastizitätsmodul und der Poissonzahl wie folgt zusammen:

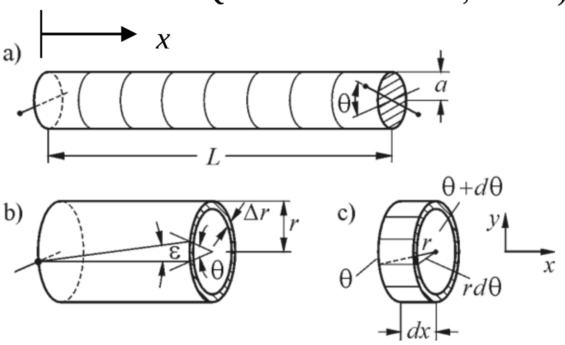
$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}}.$$

Für Metalle $\nu \sim 1/3$, somit $G \approx \frac{3}{8}E$.

Beispiele: Stahl: $E = 210\,\text{GPa} \Rightarrow G \approx 78\,\text{GPa}$.
Gummi: $\nu \approx 1/2 \Rightarrow G \approx E/3$.

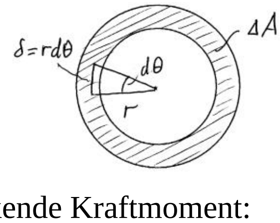
II. Torsion

Gegeben sei ein elastischer Stab mit rundem Querschnitt (Bild a). Jeder Querschnitt wird durch den Winkel $\theta(x)$ charakterisiert, um welchen er sich bezüglich des "unverdrehten" Anfangszustandes gedreht hat. Wir wollen das mit dieser Verdrehung zusammenhängende Torsionsmoment bestimmen. Als Hilfsaufgabe betrachten wir einen dünnen zylindrischen Ausschnitt aus dem Stab (dünnwandiger Zylinder mir dem Querschnittsradius *r*, Bild b).



Aus diesem schneiden wir (gedanklich) ein infinitesimal kleines Element (Ring) zwischen *x* und *x* + d*x* (Bild c). Der linke Rand ist gedreht um den Winkel $\theta(x)$, der rechte um $\theta(x+\mathrm{d}x) = \theta(x) + \mathrm{d}\theta$. Den Ring teilen wir weiterhin in kleine (ursprünglich rechteckige) Elemente. Durch Verdrehung erleidet jedes kleine Element *reine Scherung. Die Scherdeformation* ist gleich

$$\gamma = \frac{\Delta y}{l_0} = \frac{r\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = r\theta',$$



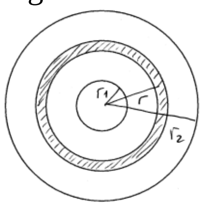
die Scherspannung:

$$\tau = G\gamma = Gr\theta'$$

Das im Querschnitt wirkende Kraftmoment:

$$M_{Ring} = \underbrace{\tau \cdot A \cdot}_{\text{Kraft}} \underbrace{r}_{\text{Hebelarm}} = Gr\theta' A \cdot r = GAr^2\theta'$$

Summiert über alle Ringe im Querschnitt ergibt sich das folgende Torsionsmoment:



$$M_T = \sum \Delta M = \sum \tau r \Delta A =$$

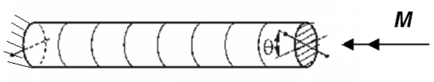
$$= \int_{r_1}^{r_2} \tau(r)\, r\, \mathrm{d}A = \int_{r_1}^{r_2} G\theta'(x) r^2\, \mathrm{d}A$$

$$= G\theta'(x) \int_{r_1}^{r_2} r^2\, \mathrm{d}A$$

$$M_T = G\theta'(x) I_p,$$

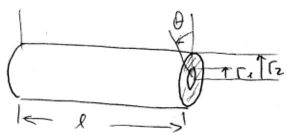
$I_p = \int_{r_1}^{r_2} r^2\, \mathrm{d}A$ - ist das *polare Flächenträgheitsmoment* des Querschnitts

III. Torsionssteifigkeit



Wird ein Stab durch ein Torsionsmoment M_T um den Winkel θ verdreht, so gilt $\boxed{M_T = k\theta}$. *k* ist *Torsionssteifigkeit.*

IV. Homogene Torsion eines homogenen Stabes.



In diesem Fall gilt

$$\theta' = \frac{\Delta\theta}{\Delta x} = \frac{\theta}{l}.$$

Für das Torsionsmoment: $M = G\theta'(x) I_p = G\frac{\theta}{l} I_p = k\theta$.

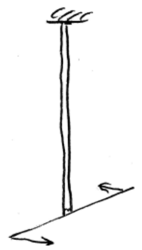
Die Torsionssteifigkeit ist: $\boxed{k = \frac{GI_p}{l}}$.

Für einen runden Querschnitt gilt

$$I_p = \int_{r_1}^{r_2} r^2\, \mathrm{d}A = \int_{r_1}^{r_2} r^2 2\pi r\, \mathrm{d}r = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} r^3 \mathrm{d}r$$

$$= 2\pi \left. \frac{r^4}{4} \right|_{r_1}^{r_2} = \frac{\pi}{2}\left(r_2^4 - r_1^4\right).$$

Für einen Vollzylinder mit dem Radius R gilt $\boxed{I_p = \frac{\pi}{2} R^4}$. Die Torsionssteifigkeit ist gleich $\boxed{k = \frac{\pi G}{2l} R^4}$.



Torsion kann man zur Messung des Schubmoduls benutzen (historisches Beispiel: Torsionswaage von Coulomb).

V. Spannungen bei Torsion

Aus der Gleichung $\tau = G\gamma = Gr\theta'$ folgt, daß die Deformationen im Querschnitt nicht gleichmäßig verteilt sind: An der Achse sind sie Null und erreichen an der äußeren Fläche den maximalen Wert

$$\tau_{\max} = GR\theta' = GR\frac{\theta}{l}.$$

Andererseits ist $M_T = G\frac{\theta}{l} I_p \Rightarrow \frac{\theta}{l} = \frac{M_T}{GI_p} \Rightarrow$

$$\boxed{\tau_{\max} = R\frac{M_T}{I_p}}$$

Für einen Vollzylinder:

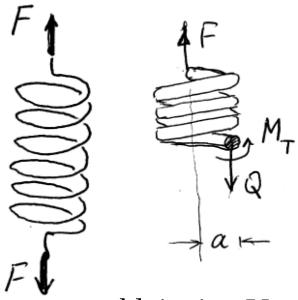
$$\boxed{\tau_{\max} = R\frac{M_T}{I_p} = R\frac{M_T}{\frac{\pi}{2}R^4} = \frac{2}{\pi}\frac{M_T}{R^3}}$$

Aufgabe: Eine stählerne Welle überträgt ein Kraftmoment $M_T = 10^4$ Nm. Zu bestimmen ist der zulässige Durchmesser der Welle, wenn die Spannungen den Wert $\tau_{\max} = 60\,\text{MPa}$ nicht überschreiten dürfen.

Lösung:

$$R_{\min} = \left(\frac{2}{\pi}\frac{M_T}{\tau_{\max}}\right)^{1/3} = \left(\frac{2}{\pi}\frac{10^4\,\text{N m}}{60\cdot 10^6\,\text{Pa}}\right)^{1/3} \approx 47\,\text{mm}$$

VI. Steifigkeit einer Schraubenfeder

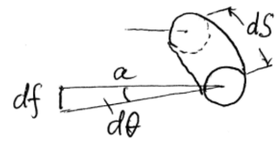


Zu bestimmen ist die Federkonstante einer Schraubenfeder. Die Feder sei eng gewickelt (Steigungswinkel klein). Der Durchmesser des Federdrahtes sei klein im Vergleich zum Radius der Wicklung.

Aus einem Schnitt an einer beliebigen Stelle erhalten wir

$$Q = F, \quad M_T = aF.$$

Betrachten wir einen unendlich kleinen Ausschnitt ds der Feder.



Durch seine Verdrehung um den Winkel dθ entsteht eine Absenkung des Zentrums eines Federringes um $\mathrm{d}f = a\mathrm{d}\theta$. Der Torsionswinkel ergibt sich aus $M_T = G\frac{\theta}{l}I_p$, wobei wir d$\theta$ statt θ und ds statt l einsetzen:

$$M_T = G\frac{d\theta}{ds}I_p.$$

Für den Torsionswinkel ergibt sich

$\mathrm{d}\theta = \frac{M_T}{GI_p}\mathrm{d}s$ und für die Absenkung

$$\mathrm{d}f = a\mathrm{d}\theta = a\frac{M_T}{GI_p}\mathrm{d}s.$$

Durch Integration über die Drahtlänge erhalten wir für die gesamte Absenkung (Verschiebung des unteren Federringes)

$$f = \int a\frac{M_T}{GI_p}\mathrm{d}s = a\frac{M_T}{GI_p}L = a\frac{aF}{GI_p}L,$$

wobei L die Gesamtlänge des Federdrahtes ist ($L \approx 2\pi an$):

$$f = a\frac{aF}{GI_p}2\pi an = \frac{a^3F}{GI_p}2\pi n$$

(n ist die Zahl der Windungen).

Für die Federsteifigkeit ergibt sich

$$c = \frac{F}{f} = \frac{GI_p}{2\pi na^3} = \frac{G\frac{\pi}{2}R^4}{2\pi na^3} = \frac{GR^4}{4na^3} = \frac{Gd^4}{64na^3}.$$

Aufgabe: Zu bestimmen ist die maximale Spannung in einer Schraubenfeder (gegeben: G, n, a, d, F).

Lösung: $\tau_{\max} = R\frac{M_T}{I_p} = \frac{2}{\pi}\frac{M_T}{R^3} = \frac{16}{\pi}\frac{aF}{d^3}$.

Eine Feder aus einem Federstahl mit $\tau_{\max} = 200\,\text{MPa}$ habe folgende geometrische Parameter: $a = 1\text{cm}, d = 1\text{mm}$, $n = 10$. Wie groß ist die maximale zulässige Kraft?

Lösung:

$$F = \frac{\pi\tau_{\max}d^3}{16a} = \frac{3{,}14\cdot 200\cdot 10^6\,\text{Pa}\cdot\left(10^{-3}\right)^3\,\text{m}^3}{16\cdot 1\cdot 10^{-2}\,\text{m}} \approx 3{,}9\,\text{N}$$

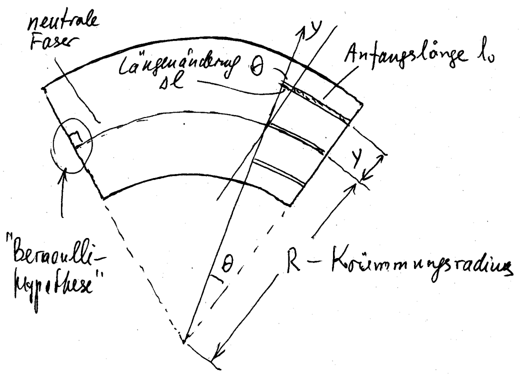
(Das entspricht einem Gewicht mit der Masse $m \approx 0{,}4\,\text{kg}$).

Balkenbiegung.

Literatur: ***Hauger, Schnell und Groß.*** **Technische Mechanik 2 (Elastostatik), 4.1., 4.3**

I. Biegemoment in einem gebogenen Balken

Wird ein Balken gebogen, so wird das Material auf der inneren Seite der Kurve gestaucht und an der äußeren Seite gedehnt. Dazwischen muss eine "neutrale Fläche" liegen, auf der das Material nicht gedehnt ist.



Bei einer *reinen Biegung* (unter der Wirkung von Biegemomenten) stehen die Querschnitte senkrecht zur Balkenachse (neutraler Faser). Bei einer Biegung unter der Wirkung einer Querkraft ist diese Bedingung für *schlanke Balken* eine gute Näherung (Bernoulli-Hypothese).

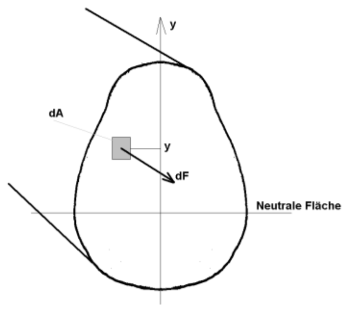
Wir betrachten ein infinitesimal kleines Element des Balkens, das vom Krümmungszentrum aus gesehen, das Winkelmaß θ hat. Diese wird in dünne Streifen parallel zur Balkenachse unterteilt. Für einen solchen Streifen mit der Koordinate y (gemessen von der neutralen Faser) kann man der Skizze folgende Zusammenhänge entnehmen:

Anfangslänge $l_0 = R\theta$,

Längenänderung $\Delta l = y\theta$.

Daraus ergibt sich für die Dehnung

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{y}{R}$$



Die Zugspannung ergibt sich nach dem Hookeschen Gesetz zu

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{y}{R}.$$

Die in dem Querschnitt wirkende Gesamtkraft ist

$$N = \int\limits_{Querschnitt} \mathrm{d}F = \frac{E}{R}\int y\,\mathrm{d}A. \qquad (1)$$

Das Moment einer einzelnen Kraft dF ist gleich

$$\mathrm{d}M_z = -\mathrm{d}F \cdot \underbrace{y}_{Hebelarm} = -\frac{E}{R}y^2\mathrm{d}A$$

und das Gesamtmoment daher

$$M_z = \int \mathrm{d}M_z = -\frac{E}{R}\int y^2\mathrm{d}A. \qquad (2)$$

Aber: Wo liegt die neutrale Fläche? (Bisher haben wir eine willkürliche Lage gewählt).

Die Lage der neutralen Fläche wird durch (1) bestimmt. Bei einer reinen Biegung (ohne Längskraft) gilt: $N = 0$, d.h. $\int y\,\mathrm{d}A = 0$. Das bedeutet, dass die neutrale Fläche *durch den Schwerpunkt des Querschnittes* geht.

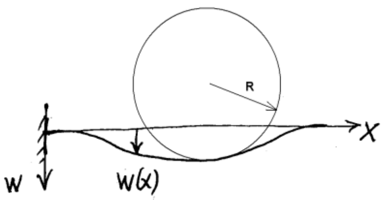
(Das folgt aus der Definition der Schwerpunktkoordinate $y_s = \frac{\int y\,\mathrm{d}A}{\int \mathrm{d}A}$).

Die Größe $\boxed{I_z = \int y^2 dA}$ nennt man *Flächenträgheitsmoment des Querschnitts bezüglich der z-Achse.* Damit ergibt sich für das Biegemoment (2) die folgende Grundgleichung der Balkentheorie

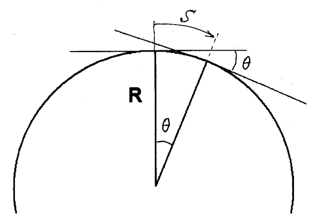
$$\boxed{M_z = -\frac{EI_z}{R}}$$

II. Elastische Biegelinie

A. Ein bisschen Geometrie:



Bei einem gebogenen Balken kann man in jedem Punkt den lokalen Krümmungsradius definieren. Der Krümmungsradius lässt sich analytisch berechnen.

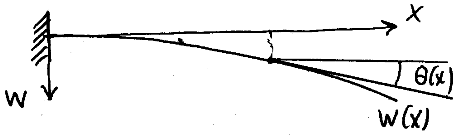


Zu diesem Zweck untersuchen wir die Drehung der Tangente zu einem Kreis:

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{R}.$$

Daraus folgt, dass $\frac{1}{R} = \frac{\Delta\theta}{\Delta s}$. Bei nicht konstanten Krümmung $\frac{1}{R} = \frac{\mathrm{d}\theta(s)}{\mathrm{d}s}$.

Für einen Balken mit der Biegelinie $w(x)$ gilt



$\theta(x) \approx \tan\theta(x) = \dfrac{\mathrm{d}w(x)}{\mathrm{d}x} = w'(x)$, und

$s \approx x \quad \Rightarrow$

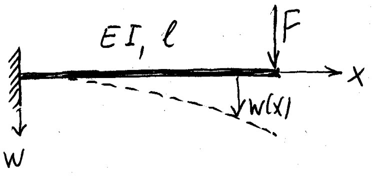
$$\frac{1}{R} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} \approx \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} \approx \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}w}{Ex}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = w''(x).$$

Für das Biegemoment ergibt sich somit

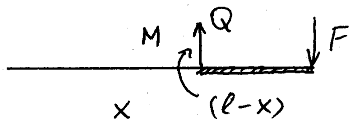
$$\boxed{M_z = -\frac{EI_z}{R} = -EI_z w''(x)}$$

"Balken-Gleichung"

III. Klassisches Beispiel: Biegung eines Kragbalkens unter einer an seinem Ende angreifenden Kraft



Zunächst machen wir eine Freischnittsskizze und bestimmen den Verlauf der Schnittlasten:



$Q = F$,

$M = -F(l-x)$.

Aus der Balkengleichung folgt

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{M}{EI} = \frac{F(l-x)}{EI}.$$

Die erste Integration ergibt:

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \int \frac{F(l-x)}{EI}\mathrm{d}x + C_1 = \frac{F}{EI}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + C_1.$$

Die zweite Integration ergibt:

$$w(x) = \int\left[\frac{F}{EI}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + C_1\right]\mathrm{d}x + C_2$$

$$= \frac{F}{EI}\left(l\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + C_1 x + C_2.$$

Randbedingungen:

Tabelle 4.2. Randbedingungen

Lager	w	w'	M	Q
gelenkiges Lager	0	$\neq 0$	0	$\neq 0$
Parallelführung	$\neq 0$	0	$\neq 0$	0
Einspannung	0	0	$\neq 0$	$\neq 0$
freies Ende	$\neq 0$	$\neq 0$	0	0

Bei der Einspannung gilt:

$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0$.

Daraus folgt: $C_1 = 0$, $C_2 = 0$

und die Biegelinie ist daher:

$$\boxed{w(x) = \frac{Fl}{EI}\frac{x^2}{2} - \frac{F}{EI}\frac{x^3}{6}}$$

Absenkung des Angriffspunktes der Kraft:

$$\boxed{w(l) = \frac{Fl^3}{3EI}}.$$

Federsteifigkeit einer Blattfeder:

$$c = \frac{F}{w(l)} = \frac{3EI}{l^3}$$

IV. Balken unter einer Streckenlast

Bei einer kontinuierlich verteilten Kraft $q(x)$ gilt für das Biegemoment die Differentialgleichung der Schnittlasten:

$$\frac{\mathrm{d}^2 M(x)}{\mathrm{d}x^2} = -q(x).$$

Die Balkengleichung lautet:

$M(x) = -EI_z w''(x)$.

Indem wir diese Gleichung zweimal differenzieren und die Differentialgleichung für das Moment verwenden, erhalten wir:

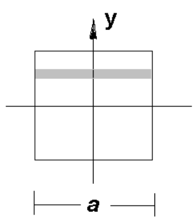
$$\boxed{\left(EI_z w''(x)\right)'' = q(x)}$$

(Balkendifferentialgleichung 4. Ordnung)

Für einen homogenen Balken vereinfacht sie sich zu

$EI_z w^{IV}(x) = q(x)$.

V. Flächenträgheitsmoment eines Balkens mit einem quadratischen Querschnitt



$$I_z = \int y^2 \mathrm{d}A = \int_{-a/2}^{a/2} y^2 a\mathrm{d}y$$

$$= a\left.\frac{y^3}{3}\right|_{-a/2}^{a/2} = 2a\frac{a^3}{3\cdot 8} = \frac{a^4}{12}$$

Damit ist Federsteifigkeit einer "Balkenfeder" mit einem quadratischen Querschnitt:

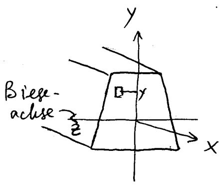
$$c = \frac{3EI}{l^3} = \frac{Ea^4}{4l^3}$$

Flächenträgheitsmomente.

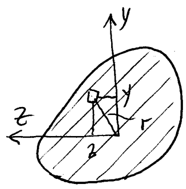
Literatur: ***Hauger, Schnell und Groß.*** **Technische Mechanik 2 (Elastostatik), 4.2.1., 4.2.2**

I. Definitionen

Wir haben das Trägheitsmoment bezüglich der z-Achse als Integral $I_z = \int y^2 \mathrm{d}A$ definiert.



Das Produkt EI_z heißt *Biegesteifigkeit* und bestimmt vollständig elastische Eigenschaften eines Balkens in Bezug auf Biegung um die z-Achse.



Es ist bequem zunächst *nicht* anzunehmen, daß das Koordinatensystem sein Ursprung im Schwerpunkt des Querschnitts hat. Wir wählen ein beliebiges Koordinatensystem und definieren die folgenden vier Größen:

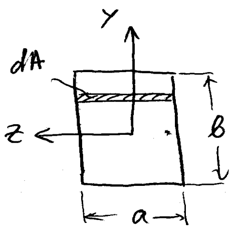
$$\left.\begin{array}{l} I_z = \int y^2 \mathrm{d}A \\ I_y = \int z^2 \mathrm{d}A \end{array}\right\} \quad \text{axiale Trägheitsmomente}$$

$$I_{zy} = I_{yz} = -\int yz\,\mathrm{d}A \quad \text{(Deviationsmoment)}$$

$$I_p = \int \left(y^2 + z^2\right) \mathrm{d}A = \int r^2 \mathrm{d}A \quad \text{(polares Flächenträgheitsmoment)}$$

II. Berechnung der Trägheitsmomente

B1. Rechteck mit den Seiten *a* und *b:*

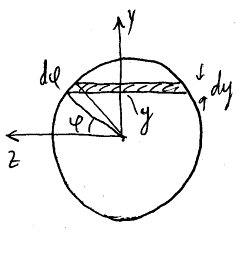


Bei der Biegung um die z-Achse schneiden wir die Platte in dünne Streifen senkrecht zur y-Achse.

$$I_z = \int y^2 \mathrm{d}A = \int_{-b/2}^{b/2} y^2 a\,\mathrm{d}y = a \left.\frac{y^3}{3}\right|_{-b/2}^{b/2} = 2a\frac{b^3}{3\cdot 8}$$

$$I_z = \frac{ab^3}{12}, \quad I_y = \frac{ba^3}{12}. \quad \Rightarrow \quad \frac{I_y}{I_z} = \left(\frac{a}{b}\right)^2.$$

B2. Kreisquerschnitt:



$$I_z = \int y^2 \mathrm{d}A =$$

$$= 2\int_0^R y^2 2\sqrt{R^2 - y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$= \left| \begin{array}{c} y = R\sin\varphi \\ \mathrm{d}y = R\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \end{array} \right| =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} R^4 \sin^2\varphi \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

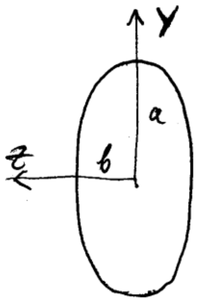
$$= 4\int_0^{\pi/2} R^4 \frac{1}{2}\left(1-\cos 2\varphi\right)\frac{1}{2}\left(1+\cos 2\varphi\right)\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^{\pi/2} R^4 \left(1-\cos^2 2\varphi\right)\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^{\pi/2} R^4 \left(1 - \frac{1}{2}\left(1+\cos 4\varphi\right)\right)\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} R^4 \mathrm{d}\varphi - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} R^4 \cos 4\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \underline{\frac{\pi R^4}{4}}$$

B3. Elliptischer Querschnitt:



Eine Ellipse mit den Halbachsen a und b wird durch die Gleichung $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ beschrieben. Daraus folgt

$$z = b\sqrt{1-\left(y/a\right)^2}.$$

Für das Flächenträgheitsmoment ergibt sich:

$$I_z = \int y^2 \mathrm{d}A = 2\int_0^a y^2 2b\sqrt{1-\left(y/a\right)^2}\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{4}ba^3.$$

Analog dazu: $I_y = \frac{\pi}{4}ab^3$.

III. Tricks

Aus den Definitionen folgt:

$$I_p = I_y + I_z.$$

B4. Polares Flächenträgheitsmoment eines Kreises:

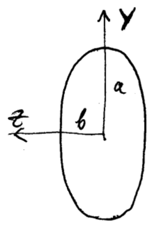
$$I_p = \int r^2 \mathrm{d}A = \int_0^R r^2 2\pi r\,\mathrm{d}r = 2\pi\int_0^R r^3 \mathrm{d}r = \pi\frac{R^4}{2}$$

Andererseits wissen wir, dass

$$I_p = I_y + I_z = 2I_y.$$

Daraus folgt: $I_y = I_z = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi R^4}{4}$.

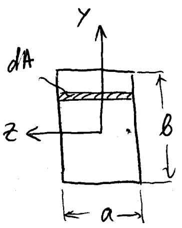
B5. Polares Flächenträgheitsmoment einer Ellipse:



$$I_p = I_y + I_z = \frac{\pi}{4}(ba^3 + ab^3)$$

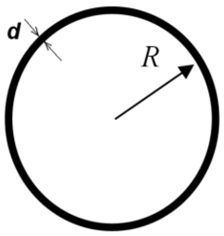
$$= \frac{\pi ab}{4}(a^2 + b^2)$$

B6. Polares Flächenträgheitsmoment eines Rechtecks:



$$I_p = I_y + I_z = \frac{1}{12}(ba^3 + ab^3) = \frac{ab}{12}(a^2 + b^2)$$

B7. Ein dünnwandiges Rohr:

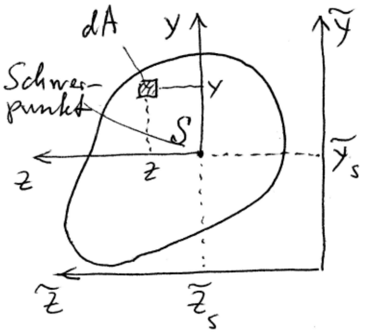


$$I_p = \int r^2 \mathrm{d}A = R^2 A = R^2 2\pi R d = 2\pi R^3 d$$

$$I_y = I_z = \frac{I_p}{2} = \pi R^3 d$$

IV. Parallelverschiebung der Bezugsachsen: Der Satz von Steiner

Betrachten wir die Trägheitsmomente $I^{(S)}$ eines Querschnitts bezüglich einer Achse, die durch den Schwerpunkt S geht und Trägheitsmoment I desselben Querschnitts bezüglich einer Achse parallel dazu. Die Koordinaten des Schwerpunkts im neuen Koordinatensystem seien $\tilde{y}_S$ und $\tilde{z}_S$. Zwischen den Koordinaten desselben Punktes in zwei Koordinatensystemen besteht folgender Zusammenhang:



$$\tilde{y} = y + \tilde{y}_S, \qquad \tilde{z} = z + \tilde{z}_S.$$

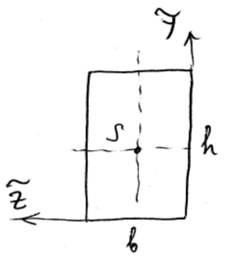
Für die Trägheitsmomente bezüglich des neuen Koordinatensystems gilt daher:

$$\begin{aligned}
I_{\tilde y} &= \int \tilde z^2 \mathrm{d}A = \int \left(z + \tilde z_S\right)^2 \mathrm{d}A \\
&= \int \left(z^2 + 2z\tilde z_S + \tilde z_S{}^2\right)\mathrm{d}A \\
&= \int z^2 \mathrm{d}A + \int 2z\tilde z_S \mathrm{d}A + \int \tilde z_S{}^2 \mathrm{d}A \\
&= I_y^{(S)} + \tilde z_S \int 2z\mathrm{d}A + \tilde z_S{}^2 \int \mathrm{d}A
\end{aligned}$$

$$I_{\tilde y} = I_y^{(S)} + \cancel{\tilde z_S \int 2z\mathrm{d}A} + \tilde z_S{}^2 A$$

$$\left.\begin{array}{l}
\boxed{I_{\tilde y} = I_y^{(S)} + \tilde z_S{}^2 A} \\
\boxed{I_{\tilde z} = I_z^{(S)} + \tilde y_S{}^2 A} \\
\boxed{I_{\tilde y \tilde z} = I_{yz}^{(S)} - \tilde y_S \tilde z_S A}
\end{array}\right\} \quad \underline{\textbf{Steinerscher Satz}}$$

B8. Steinerscher Satz für ein Rechteck



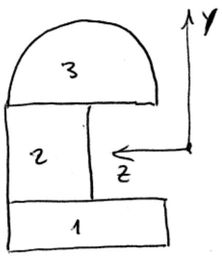
$$I_{\tilde z} = \frac{bh^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_{\tilde y} = \frac{hb^3}{3}$$

$$I_{\tilde y \tilde z} = 0 - \frac{b}{2}\frac{h}{2}bh = -\frac{b^2h^2}{4}.$$

V. Summierung der Trägheitsmomente

Ist ein Profil eine zusammengesetzte Figur, so werden die Trägheitsmomente einzelner Teile summiert:



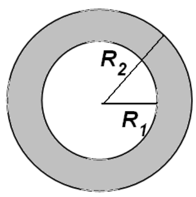
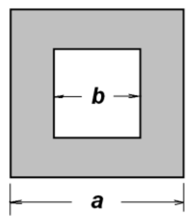
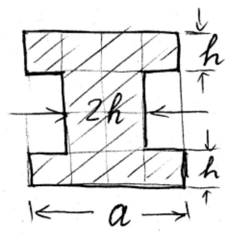
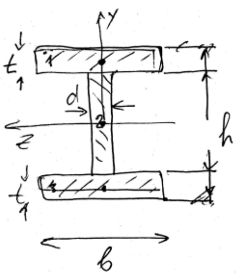
$$I_z = I_z^{(1)} + I_z^{(2)} + \ldots = \sum_{i=1}^{N} I_z^{(i)}$$

Ähnliches gilt für

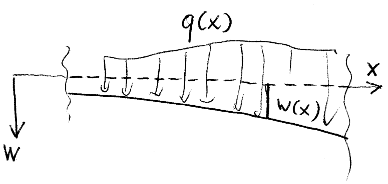
$$I_y = \sum_{i=1}^{N} I_y^{(i)}, \quad I_{yz} = \sum_{i=1}^{N} I_{yz}^{(i)}.$$

Die zu addierenden Flächenträgheitsmomente können auch negativ sein.

B9. Beispiele für zusammengesetzte Körper

 $I_z = \frac{\pi}{4}\left(R_2^4 - R_1^4\right)$	 $I_z = \frac{1}{12}\left(a^4 - b^4\right)$
 $I_z = \frac{1}{12}\left(a^4 - (a-2h)^4\right)$ Für dünnwandige Profile $I_z = \frac{2}{3}a^3 h$	 $I_z \approx \frac{dh^3}{12} + \frac{h^2bt}{2}$

I. Balkendifferentialgleichung 4. Ordnung



Verlauf der neutralen Faser eines gebogenen Balkens ("Biegelinie") berechnet sich entweder aus der Gleichung

$$EI_z w''(x) = -M_z(x)\ , \qquad (1)$$

wenn das Biegemoment als Funktion der Koordinate im Voraus bestimmt werden kann (d.h. für statisch bestimmte Systeme), oder aus der *Balkendifferentialgleichung 4. Ordnung*

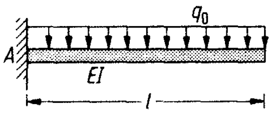
$$\boxed{\left(EI_z w''(x)\right)'' = q(x)\,. \qquad (2)}$$

Diese Gleichung kann auch an statisch unbestimmte Systeme angewandt werden. Die vier Integrationkonstanten müssen aus vier Randbedingungen bestimmt werden.

II. Beispiele

Wir untersuchen drei gleiche Balken konstanter Biegesteifigkeit EI unter konstanter Streckenlast q_0 bei unterschiedlicher Lagerung.

B1. Dieser Kragbalken ist statisch bestimmt.



Man könnte zunächst den Momentenverlauf berechnen und dann Gleichung (1) anwenden. In den meisten Fällen ist es aber einfacher, die Gleichung (2) zu benutzen:

$EIw^{IV} = q_0$.

Ihre vierfache Integration ergibt:

$$EIw''' = -Q = q_0 x + C_1,$$

$$EIw'' = -M = \tfrac{1}{2} q_0 x^2 + C_1 x + C_2,$$

$$EIw' = \tfrac{1}{6} q_0 x^3 + \tfrac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3,$$

$$EIw = \tfrac{1}{24} q_0 x^4 + \tfrac{1}{6} C_1 x^3 + \tfrac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4\,.$$

Die Randbedingungen lauten:

$w(0) = 0,\ w'(0) = 0,$

$M(l) = -EIw''(l) = 0,\ Q(l) = -EIw'''(l) = 0.$

Aus den ersten beiden folgt $C_3 = 0$, $C_4 = 0$.

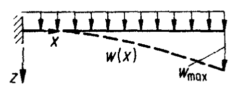
Die letzten zwei Randbedingungen lauten

$q_0 l + C_1 = 0,$

$\tfrac{1}{2} q_0 l^2 + C_1 l + C_2 = 0.$

Daraus folgt $C_1 = -q_0 l$, $C_2 = \tfrac{1}{2} q_0 l^2$ und damit

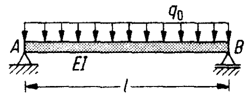
$$w(x) = \frac{q_0 x^2}{EI}\left(\tfrac{1}{24} x^2 - \tfrac{1}{6} lx + \tfrac{1}{4} l^2\right).$$



Die maximale Absenkung wird im Endpunkt erreicht und ist gleich

$$w(l) = \frac{q_0 l^2}{EI}\left(\tfrac{1}{24} l^2 - \tfrac{1}{6} l^2 + \tfrac{1}{4} l^2\right) = \frac{1}{8}\frac{q_0 l^4}{EI}\,.$$

B2. Auch dieser Balken ist statisch bestimmt gelagert. Dennoch ist es auch in diesem Fall einfacher, die Gleichung (2) zu benutzen. Da



die Streckenlast dieselbe ist, wie im Beispiel 1, ist auch die allgemeine Lösung dieselbe. Der einzige Unterschied liegt in den Randbedingungen:

$w(0) = 0$, $w(l) = 0$, $M(0) = 0$, $M(l) = 0$.

$EIw(0) = C_4 = 0$, $\quad EIw''(0) = C_2 = 0$,

$EIw(l) = \tfrac{1}{24} q_0 l^4 + \tfrac{1}{6} C_1 l^3 + C_3 l = 0$,

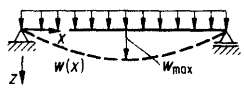
$EIw''(l) = \tfrac{1}{2} q_0 l^2 + C_1 l = 0$,

$C_1 = -\tfrac{1}{2} q_0 l$, $C_3 = \tfrac{1}{24} q_0 l^3$.

Die Biegelinie ist

$$w(x) = \tfrac{1}{EI}\left(\tfrac{1}{24} q_0 x^4 - \tfrac{1}{12} q_0 l x^3 + \tfrac{1}{24} q_0 l^3 x\right)$$

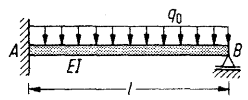
$$= \tfrac{q_0}{24EI}\left(x^4 - 2lx^3 + l^3 x\right)$$



Die maximale Durchbiegung wird in der Mitte $x = l/2$ erreicht und ist gleich

$$w(l/2) = \tfrac{q_0}{24EI}\left(\tfrac{1}{16} l^4 - \tfrac{1}{4} l^4 + \tfrac{1}{2} l^4\right) = \tfrac{5}{384}\tfrac{q_0 l^4}{EI}\,.$$

B3. Der unten abgebildete Balken ist statisch unbestimmt gelagert. Schnittlasten (unter anderem das Biegemoment) können daher nicht allein aus den Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden. Die Benutzung von Glei-



chung (2) ist in diesem Fall der einzig mögliche Weg zur Berechnung der Durchbiegung. Wir nehmen an, dass der Balken in Abwesenheit der Streckenlast spannungsfrei gelagert war.

Die Streckenlast und damit die allgemeine Lösung sind dieselbe wie in den vorigen beiden Beispielen. Die Randbedingungen lauten aber in diesem Fall wie folgt:

$w(0) = 0$, $w'(0) = 0$, $w(l) = 0$, $M(l) = 0$.

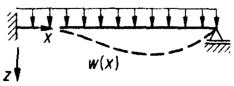
$EIw(0) = C_4 = 0$, $\quad EIw'(0) = C_3 = 0$,

$EIw(l) = \tfrac{l^2}{2}\left(\tfrac{1}{12} q_0 l^2 + \tfrac{1}{3} C_1 l + C_2\right) = 0$,

$EIw''(l) = \tfrac{1}{2} q_0 l^2 + C_1 l + C_2 = 0$.

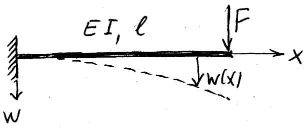
Aus den letzten beiden Gleichungen folgt

$C_1 = -\frac{5}{8} q_0 l$, $C_2 = \frac{1}{8} q_0 l^2$.
Für die Biegelinie ergibt sich somit
$w(x) = \frac{q_0}{EI}\left(\frac{1}{24}x^4 - \frac{5}{48}lx^3 + \frac{1}{16}l^2x^2\right)$.



Zusammen mit der Biegelinie haben wir auch die Verläufe von $w'(x)$, dem Biegemoment $M(x) = -\frac{1}{8}q_0\left(4x^2 - 5lx + l^2\right)$ und der Querkraft $Q(x) = -\frac{1}{8}q_0\left(8x - 5l\right)$ bestimmt. Daraus lassen sich die Lagerreaktionen ablesen:
$A = Q(0) = \frac{5}{8}q_0 l$, $B = -Q(l) = \frac{3}{8}q_0 l$,
$M^{(A)} = M(0) = -\frac{1}{8}q_0 l^2$.

B4. Wir lösen jetzt noch einmal die Aufgabe, die wir schon einmal durch Integration der Balkengleichung zweiter Ordnung gelöst haben.



Gegeben sei ein links fest eingespannter Balken. An seinem rechten Ende greift eine Kraft F an. Zu bestimmen ist die Biegelinie und den Neigungswinkel im Angriffspunkt der Kraft.

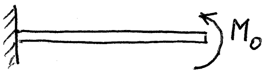
Lösung: Auch in diesem Fall ist die oben erhaltene allgemeine Lösung korrekt, nur ist
$q_0 = 0$: $EIw^{IV} = 0$,
$EIw''' = -Q = C_1$,
$EIw'' = -M = C_1 x + C_2$,
$EIw' = \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$,
$EIw = \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4$.

Die Randbedingungen sind fast wie im ersten Beispiel:
$w(0) = 0$, $w'(0) = 0$, $M(l) = -EIw''(l) = 0$.

Für die Querkraft am rechten Rand gilt aber
$Q(l) = -EIw'''(l) = F$.
$EIw(0) = C_4 = 0$, $\quad EIw'(0) = C_3 = 0$,
$EIw''(l) = C_1 l + C_2 = 0$,
$EIw'''(l) = -Q = C_1 = -F$.

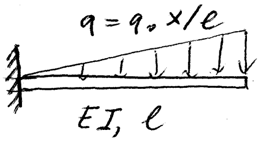
Daraus folgt $C_2 = Fl$. Für die Biegelinie ergibt sich $w(x) = \frac{F}{EI}\left(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}lx^2\right)$ und für den Neigungswinkel (eigentlich Tangens des Neigungswinkels) $w'(x) = \frac{F}{EI}\left(-\frac{1}{2}x^2 + lx\right)$. Die Absenkung des Angriffspunktes der Kraft ist gleich $w(l) = \frac{Fl^3}{3EI}$. Für den Neigungswinkel des rechten Endes ergibt sich $\theta(l) \approx w'(l) = \frac{1}{2}\frac{F}{EI}l^2$.

B5. Biegelinie unter Einwirkung eines Momentes:



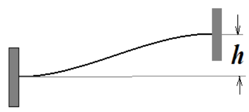
Die allgemeine Lösung lautet wie folgt:
$EIw''' = -Q = C_1$,
$EIw'' = -M = C_1x + C_2$,
$EIw' = \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$,
$EIw = \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4$.
Die Randbedingungen sind:
$w(0) = 0$, $w'(0) = 0$, $M(l) = -EIw''(l) = M_0$,
$Q(l) = -EIw'''(l) = 0$. Daraus folgt:
$EIw(0) = C_4 = 0$, $\quad EIw'(0) = C_3 = 0$,
$EIw''(l) = C_1 l + C_2 = -M_0$,
$EIw'''(l) = -Q = C_1 = 0$. Die Biegelinie ist eine Parabel: $w(x) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{M_0}{EI}x^2$.

B6. Auf einen links fest eingespannten Balken wirkt eine linear steigende Streckenlast. Zu bestimmen ist die Biegelinie.



Lösung: Die Balkendifferentialgleichung vierter Ordnung lautet
$EIw^{IV} = q_0 x / l$.
Ihre vierfache Integration ergibt:
$EIw''' = -Q = \frac{1}{2}q_0x^2 / l + C_1$,
$EIw'' = -M = \frac{1}{6}q_0x^3 / l + C_1x + C_2$,
$EIw' = \frac{1}{24}q_0x^4 / l + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$,
$EIw = \frac{1}{120}q_0x^5 / l + \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4$.
Die Randbedingungen lauten:
$w(0) = 0$, $w'(0) = 0$,
$M(l) = -EIw''(l) = 0$, $Q(l) = -EIw'''(0) = 0$.
Aus den ersten beiden folgt $C_3 = 0$ und $C_4 = 0$.
Die letzten zwei Randbedingungen lauten
$EIw'''(l) = \frac{1}{2}q_0 l + C_1 = 0$,
$EIw''(l) = \frac{1}{6}q_0 l^2 + C_1 l + C_2 = 0$.
Daraus folgt $C_1 = -\frac{1}{2}q_0 l$ und $C_2 = \frac{1}{3}q_0 l^2$.
$w(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{120}q_0x^5 / l - \frac{1}{12}q_0lx^3 + \frac{1}{6}q_0l^2x^2\right)$.

B7.



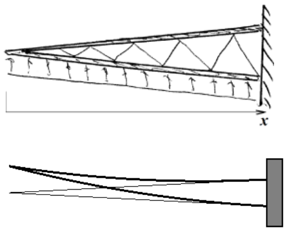
Die allgemeine Lösung:
$w' = \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$
$w = \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4$.
Randbedingungen:
$w(0) = 0$, $w'(0) = 0$, $w(l) = -h$, $w'(l) = 0$.
$w(x) = h\left(2\left(x/l\right)^3 - 3\left(x/l\right)^2\right)$.

Balkenbiegung: Heterogene und zusammengesetzte Systeme. Steifigkeiten.

Literatur: *Hauger, Schnell und Groß.* Technische Mechanik 2 (Elastostatik), 4.5.3, 4.5.4

I. Biegelinie eines Balkens mit veränderlicher Biegesteifigkeit

B1. Ein Flügel habe die unten gezeigte Konstruktion und sei mit einer konstanten Streckenlast belastet.



Das Flächenträgheitsmoment des Querschnittes kann als $I(x) = I_0 x^2 / l^2$ geschrieben werden. Die Biegedifferentialgleichung hat die Form $\left(EIw''(x)\right)'' = -q_0$. Ihre zweifache Integration unter Berücksichtigung der Randbedingungen

$\left(EIw''(x)\right)'\Big|_{x=0} = 0$ und $EIw''(0) = 0$ ergibt

$$EI_0\left(x/l\right)^2 w''(x) = -\tfrac{1}{2} q_0 x^2, \quad EI_0 w''(x) = -\tfrac{1}{2} q_0 l^2$$

Weitere zwei Integrationen ergeben

$$EI_0 w'(x) = -\tfrac{1}{2} q_0 l^2 x + C_3,$$

$$EI_0 w(x) = -\tfrac{1}{4} q_0 l^2 x^2 + C_3 x + C_4 .$$

Aus den Randbedingungen

$w(l) = 0$ und $w'(l) = 0$

folgt dann $C_3 = \tfrac{1}{2} q_0 l^3$, $C_4 = -\tfrac{1}{4} q_0 l^4$.

Die Biegelinie ist somit eine Parabel

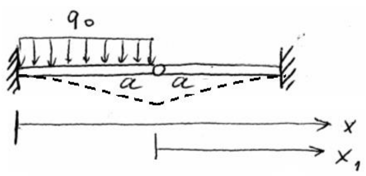
$$w(x) = -\tfrac{q_0 l^2}{4EI_0}\left(x-l\right)^2 .$$

II. Übergangsbedingungen

In den folgenden Fällen ist es manchmal vorteilhaft oder notwendig, den Balken in mehrere Felder zu teilen und für jedes Feld eine eigene Integration durchzuführen:

- Es gibt Sprünge im Querschnitt,
- Im Verlauf des Balkens greifen einzelne (konzentrierte) Kräfte oder Momente an,
- Ein Balken ist aus mehreren Teilen zusammengesetzt, die gelenkig mit einander gekoppelt sind,
- ....

B2. Als Beispiel betrachten wir das unten abgebildete System bestehend aus zwei gelenkig gekoppelten Balken gleicher Biegesteifigkeit *EI*, deren andere Enden fest eingespannt sind.



Wenn wir für jeden "ganzen" Balkenabschnitt eine eigene Koordinatenachse wählen (wobei $x_1 = x - a$ ist), sind die allgemeinen Lösungen für jeden Abschnitt bereits bekannt. Für den linken Abschnitt gilt:

$$EIw''' = -Q = q_0 x + C_1,$$

$$EIw'' = -M = \tfrac{1}{2} q_0 x^2 + C_1 x + C_2,$$

$$EIw' = \tfrac{1}{6} q_0 x^3 + \tfrac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3,$$

$$EIw = \tfrac{1}{24} q_0 x^4 + \tfrac{1}{6} C_1 x^3 + \tfrac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4 .$$

Für den rechten Abschnitt gilt:

$$EIw''' = -Q = B_1,$$

$$EIw'' = -M = B_1\left(x-a\right) + B_2,$$

$$EIw' = \tfrac{1}{2} B_1\left(x-a\right)^2 + B_2\left(x-a\right) + B_3,$$

$$EIw = \tfrac{1}{6} B_1\left(x-a\right)^3 + \tfrac{1}{2} B_2\left(x-a\right)^2 + B_3\left(x-a\right) + B_4$$

Aus den vier Randbedingungen:

$w(0) = 0$, $w'(0) = 0$, $w(2a) = 0$, $w'(2a) = 0$

und vier **Übergangsbedingungen**:

$w(a)_{links} = w(a)_{rechts}$, $EIw''(a)_{links} = 0$,

$EIw''(a)_{rechts} = 0$, $EIw'''(a)_{links} = EIw'''(a)_{rechts}$

folgt dann

$$C_1 = -\tfrac{13}{16} q_0 a, \quad C_2 = \tfrac{5}{16} q_0 a^2, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = 0,$$

$$B_1 = \tfrac{3}{16} q_0 a, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = -\tfrac{3}{32} q_0 a^3,$$

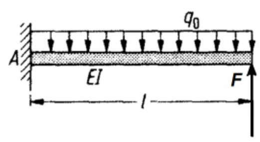
$$B_4 = \tfrac{1}{16} q_0 a^4 .$$

Insbesondere ergibt sich für die Absenkung des Gelenkes $w(a) = \tfrac{q_0 a^4}{EI}\left(\tfrac{1}{24} - \tfrac{13}{6 \cdot 16} + \tfrac{1}{2}\tfrac{5}{16}\right) = \tfrac{1}{16}\tfrac{q_0 a^4}{EI}$.

III. Superposition

Bei Problemen mehrerer Bereiche ist es oft einfacher das Superpositionsprinzip zu nutzen.

B3. Betrachten wir den neben stehend gezeigten Kragbalken. Zu bestimmen ist die Biegelinie.



Lösung: Die gegebene Belastung ist eine Superposition aus einer konstanten Streckenlast und einer Kraft $-F$. Die Biegelinien für die beiden Belastungen alleine sind bekannt:

Streckenlast: $w_1(x) = \tfrac{q_0 x^2}{EI}\left(\tfrac{1}{24} x^2 - \tfrac{1}{6} l x + \tfrac{1}{4} l^2\right)$,

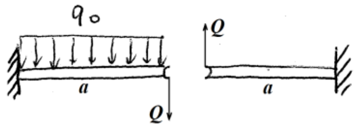
einzelne Kraft: $w_2(x) = -\tfrac{F}{EI}\left(-\tfrac{1}{6} x^3 + \tfrac{1}{2} l x^2\right)$.

Bei der gesamten Belastung gilt das **Superpositionsprinzip**: $w(x) = w_1(x) + w_2(x)$.

Man kann z.B. eine Kraft wählen, bei der sich das rechte Ende nicht verschiebt:

$w(l) = \frac{1}{8}\frac{q_0 l^4}{EI} - \frac{Fl^3}{3EI} = 0$. Daraus ergibt sich $F = \frac{3}{8} q_0 l$. Das ist das Ergebnis für die Lagerkraft im Beispiel 3 der vorigen Vorlesung.

Die Aufgabe aus **Beispiel 2** kann man auch mit Hilfe des Superpositionsprinzips lösen. Ein Schnitt am Gelenk zeigt die in diesem Gelenk auf den linken und rechten Teil des Systems wirkenden Kräfte. Die Absenkung des linken Balkens ist gleich



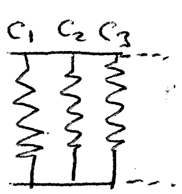
$w_-(a) = \frac{q_0 a^4}{8EI} + \frac{Qa^3}{3EI}$, des rechten $w_+(a) = -\frac{Qa^3}{3EI}$.

Da die beiden gekoppelt sind und daher gleich sein müssen, folgt $\frac{q_0 a^4}{8EI} + \frac{Qa^3}{3EI} = -\frac{Qa^3}{3EI}$. Daraus erhalten wir die noch unbekannte Querkraft $Q = -\frac{3q_0 a}{16}$. Die Absenkung des Gelenks ist somit gleich $w_+(a) = -\frac{q_0 a^4}{16EI}$, was wir vorher durch direkte Integration und Übergangsbedingungen erhalten haben.

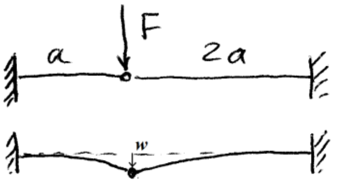
IV. Steifigkeiten

Ist bei einem zusammengesetzten System nur die Verschiebung des Angriffspunktes einer Kraft von Interesse, so kann unter bestimmten Voraussetzungen die Benutzung des Begriffes Federsteifigkeit die Berechnungen sehr stark vereinfachen.

Verursacht eine Kraft F eine Verschiebung w des Angriffspunktes in ihrer Wirkungsrichtung, so gilt $F = cw$, wobei c - die *Federsteifigkeit* ist. Für einen Stab, der in Richtung seiner Achse belastet wird, gilt $c_{Stab} = \frac{EA}{l}$. Für einen Kragbalken der Länge *l*, der Am Ende mit der Querkraft F belastet wird, gilt $c_{Blattfeder} = \frac{3EI}{l^3}$. Werden mehrere Federn mit Steifigkeiten c_1, c_2, ... parallel angeordnet, so summieren sich die Steifigkeiten: $c = c_1 + c_2 + \ldots$.



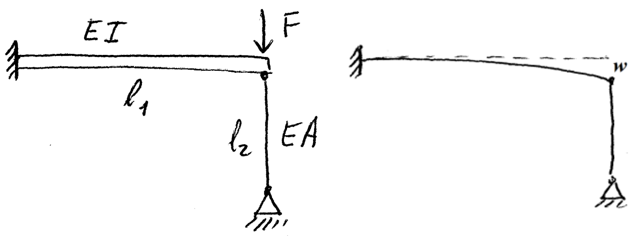
B4. Betrachten wir das unten abgebildete System bestehend aus zwei gelenkig gekoppelten Balken gleicher Biegesteifigkeit *EI*, deren andere Enden fest eingespannt sind.



Zu bestimmen ist die Absenkung des Angriffspunktes der Kraft. Der erste Lösungsweg ist, die Balkendifferentialgleichung für beide Felder zu integrieren und die 8 Rand- und Übergangsbedingungen zu benutzen. Viel einfacher ist es aber zu bemerken, daß das gezeigte System zwei parallel angeordnete Blattfedern mit den Federsteifigkeiten $c_1 = 3EI/a^3$ und $c_2 = 3EI/(2a)^3$ darstellt. Die Gleichgewichtsbedingung für das Gelenk lautet somit $F = F_1 + F_2 = c_1 w + c_2 w = \frac{27EI}{8a^3} w$.

Für die Verschiebung erhalten wir $w = \frac{8a^3 F}{27EI}$.

B5. Ein links fest eingespannter Balken ist rechts mit einem elastischen Pendelstab gestützt und mit einer Kraft F belastet. Zu bestimmen ist die Absenkung des Angriffspunktes der Kraft.



Lösung: Das System besteht aus einer parallel angeordneten Blattfeder mit der Steifigkeit $c_1 = 3EI/l_1^3$ und einem Stab mit der Steifigkeit $c_2 = EA/l_2$. Die Gleichgewichtbedingung für den Knoten lautet daher wie folgt:

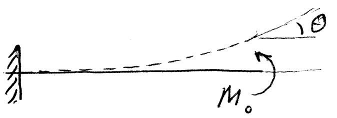
$$F = F_1 + F_2 = c_1 w + c_2 w = \left(\frac{3EI}{l_1^3} + \frac{EA}{l_2}\right) w.$$

Daraus folgt für die Absenkung

$$w = \frac{F}{\left(3EI/l_1^3 + EA/l_2\right)}.$$

V. Drehsteifigkeit einer Blattfeder

Für die Biegelinie eines Balkens unter Wirkung eines Momentes M_0 haben wir



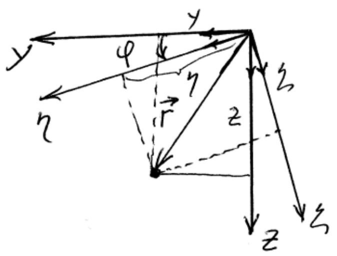
$w(x) = -\frac{1}{2}\frac{M_0}{EI} x^2$ berechnet. Das Verhältnis des Momentes zum Drehwinkel

$|\theta(l)| \approx |w'(l)| = \frac{M_0}{EI} l$ ist die *Drehsteifigkeit* $k = EI/l$.

Hauptträgheitsachsen und Hauptträgheitsmomente. Schiefe Biegung.

Literatur: ***Hauger, Schnell und Groß.*** **Technische Mechanik 2 (Elastostatik), 4.2.3, 4.7**

I. Drehung des Bezugssystems



Betrachten wir zwei Koordinatensysteme (y, z) und (η, ζ). Das zweite sei relativ zum ersten um den Winkel φ gedreht.

Wir führen vier Einheitsvektoren $\vec{e}_y, \vec{e}_z, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta$ entlang entsprechender Achsen ein. Betrachtet wird ein Punkt (Radiusvektor $\vec{r}$) mit den kartesischen Koordinaten y, z.

Eine geometrische Hilfsaufgabe: Zu bestimmen sind die kartesischen Koordinaten η, ζ im "gedrehten" Koordinatensystem.

Der Radiusvektor sieht ist im kartesischen System: $\vec{r} = y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$.Die Koordinaten η, ζ können als Skalarprodukte berechnet werden:

$$\eta = \vec{r} \cdot \vec{e}_\eta = \left(y\vec{e}_y + z\vec{e}_z\right) \cdot \vec{e}_\eta ,$$

$$\zeta = \vec{r} \cdot \vec{e}_\zeta = \left(y\vec{e}_y + z\vec{e}_z\right) \cdot \vec{e}_\zeta .$$

Die Skalarprodukte der Einheitsvektoren sind:

$$\vec{e}_y \cdot \vec{e}_\eta = \cos\varphi , \quad \vec{e}_z \cdot \vec{e}_\eta = \sin\varphi$$

$$\vec{e}_y \cdot \vec{e}_\zeta = -\sin\varphi , \quad \vec{e}_z \cdot \vec{e}_\zeta = \cos\varphi$$

η, ζ berechnen sich somit zu

$$\eta = y\cos\varphi + z\sin\varphi , \; \zeta = -y\sin\varphi + z\cos\varphi .$$

Für die Trägheitsmomente bezüglich η, ζ gilt

$$\begin{aligned} I_\eta &= \int \zeta^2 \mathrm{d}A = \int \left(-y\sin\varphi + z\cos\varphi\right)^2 \mathrm{d}A \\ &= \sin^2\varphi \int y^2 \mathrm{d}A + \cos^2\varphi \int z^2 \mathrm{d}A - 2\sin\varphi\cos\varphi \int yz\,\mathrm{d}A \\ &= I_z \sin^2\varphi + I_y \cos^2\varphi + 2I_{yz} \sin\varphi\cos\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_\zeta &= \int \eta^2 \mathrm{d}A = \int \left(y\cos\varphi + z\sin\varphi\right)^2 \mathrm{d}A \\ &= \cos^2\varphi \int y^2 \mathrm{d}A + \sin^2\varphi \int z^2 \mathrm{d}A + 2\sin\varphi\cos\varphi \int yz\,\mathrm{d}A \\ &= I_z \cos^2\varphi + I_y \sin^2\varphi - 2I_{yz} \sin\varphi\cos\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{\eta\zeta} &= -\int \eta\zeta dA \\ &= -\int \left(-y\sin\varphi + z\cos\varphi\right)\left(y\cos\varphi + z\sin\varphi\right) dA \\ &= \sin\varphi\cos\varphi \int y^2 dA - \sin\varphi\cos\varphi \int z^2 dA \\ &\quad + \left(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi\right) \int yz dA \end{aligned}$$

$$I_{\eta\zeta} = I_z \sin\varphi\cos\varphi - I_y \sin\varphi\cos\varphi + I_{yz}\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right)$$

Diese Gleichungen können unter Berücksichtigung der Additionstheoreme

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2\varphi\right), \; \cos^2\varphi = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2\varphi\right),$$

$$2\sin\varphi\cos\varphi = \sin 2\varphi$$

wie folgt umgeschrieben werden:

$$\boxed{I_\eta = \tfrac{1}{2}\left(I_y + I_z\right) + \tfrac{1}{2}\left(I_y - I_z\right)\cos 2\varphi + I_{yz} \sin 2\varphi}$$

$$\boxed{I_\zeta = \tfrac{1}{2}\left(I_y + I_z\right) - \tfrac{1}{2}\left(I_y - I_z\right)\cos 2\varphi - I_{yz} \sin 2\varphi}$$

$$\boxed{I_{\eta\zeta} = -\tfrac{1}{2}\left(I_y - I_z\right)\sin 2\varphi + I_{yz} \cos 2\varphi}$$

II. Invarianten

$$I_\eta + I_\zeta = I_y + I_z = I_p \quad \text{und} \quad \left[\tfrac{1}{4}\left(I_\eta - I_\zeta\right)^2 + I_{\eta\zeta}^2\right]$$

III. Hauptträgheitsachsen und Hauptträgheitsmomente

Bei einem beliebigen Querschnitt kann man die Achsen um einen Winkel φ^* so drehen, daß das Deviationsmoment verschwindet:

$$I_{\eta\zeta} = -\tfrac{1}{2}\left(I_y - I_z\right)\sin 2\varphi^* + I_{yz} \cos 2\varphi^* = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sin 2\varphi^*}{\cos 2\varphi^*} = \tan 2\varphi^* = \frac{2I_{yz}}{\left(I_y - I_z\right)} . \qquad (1)$$

Gleichzeitig nehmen die axialen Trägheitsmomente extremale Werte an:

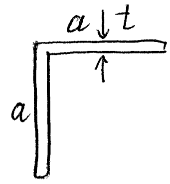
$$\frac{\partial I_\eta}{\partial \varphi} = -\left(I_y - I_z\right)\sin 2\varphi + 2I_{yz} \cos 2\varphi = 0$$

Da $\tan 2\varphi^* = \tan 2\left(\varphi^* + \pi/2\right)$ gilt, hat die Gleichung (1) immer zwei Lösungen. Die entsprechenden Achsen stehen senkrecht zu einander und heißen **Hauptträgheitsachsen**. Die zugehörigen axialen Trägheitsmomente heißen **Hauptträgheitsmomente:**

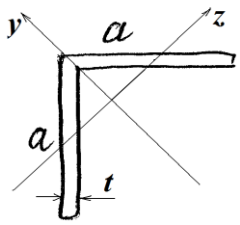
$$I_{1,2} = \frac{1}{2}\left[\left(I_y + I_z\right) \pm \sqrt{\left(I_y - I_z\right)^2 + 4I_{yz}^2}\right].$$

Zwei Balken mit gleichen Hauptträgheitsmomenten haben identische elastische Eigenschaften. Ein Balken mit einem beliebigen Querschnitt kann daher immer äquivalent durch einen Balken mit einem symmetrischen Querschnitt ersetzt werden.

B1. Zu bestimmen sind die Trägheitsachsen und Trägheitsmomente des gezeigten dünnwandigen, rechtwinkligen Profils.



Lösung: Symmetrieachsen sind immer Hauptträgheitsachsen. Da dies eine symmetrische Figur ist, bestimmen sich die Hauptachsen leicht. Der Schwerpunkt liegt auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte beider Leisten. Die Flächenträgheitsmomente sind bezüglich der z-Achse

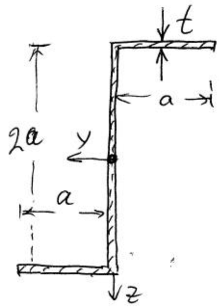


$$I_z = I_1 = 2\frac{t\sqrt{2}\left(a/\sqrt{2}\right)^3}{12} = \frac{ta^3}{12}$$

und bezüglich der y-Achse

$$I_y = I_2 = \frac{t\sqrt{2}\left(a\sqrt{2}\right)^3}{12} = \frac{ta^3}{3}.$$

B2. Zu bestimmen sind die Trägheitsachsen und Trägheitsmomente des gezeigten dünnwandigen Profils.



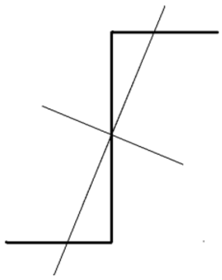
Lösung: Der Schwerpunkt liegt im Symmetriezentrum des Profils. Die Trägheitsmomente bezüglich der Achsen y und z sind:

$$I_y = \frac{t(2a)^3}{12} + 2taa^2 = \frac{8}{3}ta^3,\ I_z = \frac{2}{3}ta^3,$$

$$I_{yz} = -\int yzdA = 2\int_{-a}^{0} aytdy = -ta^3.$$

Die Lage der Hauptträgheitsachsen wird durch den Winkel φ^* gegeben:

$$\tan 2\varphi^* = \frac{-2ta^3}{\left(\frac{8}{3}ta^3 - \frac{2}{3}ta^3\right)} = -1$$



Daraus folgt $2\varphi^* = -45°$,

$\varphi^* = -22{,}5°$.

Die Hauptträgheitsmomente sind

$$I_{1,2} = \frac{1}{2}\left[\left(I_y + I_z\right) \pm \sqrt{\left(I_y - I_z\right)^2 + 4I_{yz}^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{8}{3}ta^3 + \frac{2}{3}ta^3\right) \pm \sqrt{\left(\frac{8}{3}ta^3 - \frac{2}{3}ta^3\right)^2 + 4\left(ta^3\right)^2}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}ta^3\left[\tfrac{10}{3} \pm \sqrt{2^2+4}\right] = \tfrac{5}{3} \pm \sqrt{2} = \begin{Bmatrix} 3{,}08 \\ 0{,}25 \end{Bmatrix} ta^3$$

Das größere Trägheitsmoment ist hier ca. 12 Mal größer als das kleinere.

IV. Transformation vom Hauptträgheitsachsensystem

Ist das ursprüngliche Bezugssystem das Hauptträgheitsachsensystem, so sehen die Transformationen wie folgt aus:

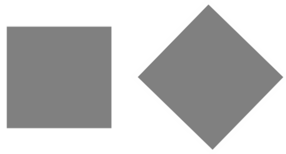
$$I_\eta = \tfrac{1}{2}\left(I_y + I_z\right) + \tfrac{1}{2}\left(I_y - I_z\right)\cos 2\varphi$$

$$I_\zeta = \tfrac{1}{2}\left(I_y + I_z\right) - \tfrac{1}{2}\left(I_y - I_z\right)\cos 2\varphi$$

$$I_{\eta\zeta} = -\tfrac{1}{2}\left(I_y - I_z\right)\sin 2\varphi.$$

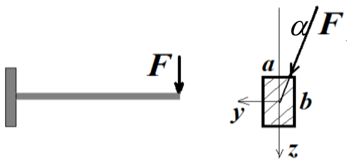
Sind die beiden Hauptträgheitsmomente gleich, so hängen sie vom Winkel nicht ab, und das Deviationsmoment ist immer Null.

Beispiel: Balken mit den folgenden zwei Profilen haben gleiche Steifigkeit.



V. Schiefe Biegung

Ein links fest eingespannter Balken mit rechteckigem Querschnitt (Seiten a und b) wird am rechten Ende mit einer Kraft $\vec{F}$ unter dem Winkel α zur Vertikalen belastet. Zu bestimmen ist der Betrag und die Richtung der Verschiebung des Angriffspunktes der Kraft.



Lösung: Die kartesischen Komponenten der Kraft $\vec{F} = (F_y, F_z)$ sind gleich $F_y = F\sin\alpha$, $F_z = F\cos\alpha$. Die Flächenträgheitsmomente sind gleich $I_y = ab^3/12$, $I_z = ba^3/12$.

Gäbe es nur die vertikale Kraftkomponente, wäre die Verschiebung des Angriffspunktes $w_z = \dfrac{F_z l^3}{3EI_y} = \dfrac{Fl^3\cos\alpha}{3EI_y}$. Analog ist für die horizontale Komponente $w_y = \dfrac{F_y l^3}{3EI_z} = \dfrac{Fl^3\sin\alpha}{3EI_z}$.

Bei Anwesenheit beider Kraftkomponenten ist der Verschiebungsvektor durch Superpositionsprinzip gegeben:

$$\vec{w} = \left(\frac{Fl^3\sin\alpha}{3EI_z}, \frac{Fl^3\cos\alpha}{3EI_y}\right) = \frac{4Fl^3}{Eab}\left(\frac{\sin\alpha}{a^2}, \frac{\cos\alpha}{b^2}\right)$$

Die Verschiebungslinie bildet mit der Vertikalen den Winkel θ: $\tan\theta = \frac{b^2}{a^2}\tan\alpha$.

Der Betrag der Verschiebung ist gleich

$$\left|\vec{w}\right| = \frac{4Fl^3}{Eab}\sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{a^4} + \frac{\cos^2\alpha}{b^4}}.$$

Spannungen im gebogenen Balken. Biegung und Längskraft.

Literatur: ***Hauger, Schnell und Groß.*** **Technische Mechanik 2 (Elastostatik), 4.4., 4.8**

I. Spannungsverteilung im Balken

Bei der Herleitung der Balkengleichung haben wir festgestellt, dass die Zugspannungen im Balken gleich $\sigma = E\varepsilon = E\dfrac{y}{R}$ sind, wobei y eine Koordinate senkrecht zur Balkenachse, gezählt von der neutralen Fläche, ist. Andererseits folgt aus der Balkengleichung $M_z = -\dfrac{EI_z}{R}$. Daraus folgt $\dfrac{1}{R} = -\dfrac{M_z}{EI_z}$ und

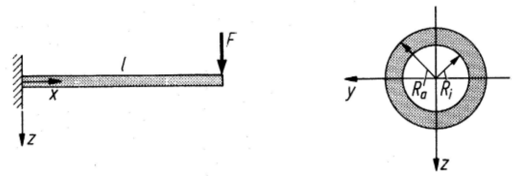
$$\boxed{\sigma = -\frac{M_z}{I_z}y}.$$

Maximale Spannungen werden erreicht in den Punkten, die am weitesten von der neutralen Fläche entfernt liegen. Wenn der maximale Abstand von der neutralen Fläche $y_{\max}$ ist, so ist die maximale Spannung gleich

$$\boxed{|\sigma_{\max}| = \left|\frac{M_z}{I_z}y_{\max}\right| = \frac{|M_z|}{W}}.$$

Die Größe $W = I_z/|y_{\max}|$ heißt *Widerstandsmoment.*

B1. Ein Rohr ($R_a = 5\,\text{cm}$, $R_i = 4\,\text{cm}$, $l = 3\,\text{m}$) ist links eingespannt. Wir groß darf die am anderen Ende angreifende Kraft F sein, damit die zulässige Spannung den Wert $\sigma_{zul} = 150\,\text{MPa}$ nicht überschreitet?



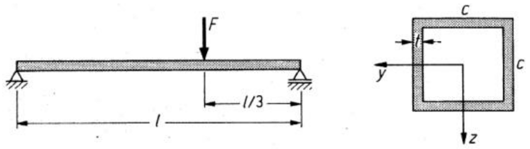
Lösung: Das maximale Biegemoment wirkt an der Einspannstelle und ist gleich $M_{\max} = lF$. Die maximale Spannung $|\sigma_{\max}| = \dfrac{|M_{\max}|}{W}$ muss die Bedingung $|\sigma_{\max}| = \dfrac{lF}{W} \le \sigma_{zul}$ erfüllen, wobei

$$W = \frac{I_z}{|y_{\max}|} = \frac{\pi\left(R_a^4 - R_i^4\right)}{4R_a} = 5{,}8\cdot 10^{-5}\,\text{m}^3 \text{ gilt.}$$

Daraus folgt

$$F \le \frac{W\sigma_{zul}}{l} = \frac{5{,}8\cdot 10^{-5}\,\text{m}^3\cdot 150\cdot 10^6\,\text{N/m}^2}{3\text{m}} \approx 2{,}9\cdot 10^3\,\text{N}.$$

B2. Ein dünnwandiger Kastenträger (konstante Wandstärke $t = 15\,\text{mm}$, Länge $L = 10\,\text{m}$) soll die Last $F = 200\,\text{kN}$ tragen. Wie groß muss die Seitenlänge mindestens sein, damit die zulässige Spannung $\sigma_{zul} = 200\,\text{MPa}$ nicht überschritten wird?



Lösung: Ist ein Balken beidseitig gelenkig gelagert, so tritt das größte Biegemoment im Angriffspunkt der Kraft auf. Es ist gleich $M_{\max} = \dfrac{2}{9}lF$. Das Trägheitsmoment des dünnwandigen Querschnitts ist $I = \dfrac{2}{3}c^3 t$.

Das Widerstandsmoment ist somit

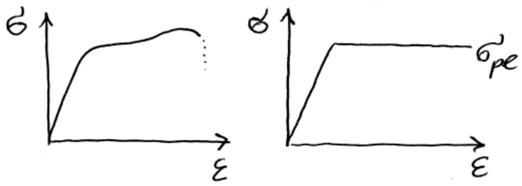
$$W = \frac{I}{|y_{\max}|} = \frac{(2/3)c^3 t}{c/2} = \frac{4}{3}tc^2.$$

Die geforderte Bedingung lautet:

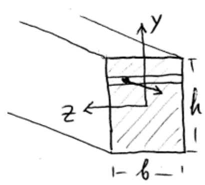
$$|\sigma_{\max}| = \frac{|M_{\max}|}{W} \le \sigma_{zul} \text{ oder } \frac{lF}{6tc^2} \le \sigma_{zul}.$$

$$\Rightarrow c \ge \sqrt{\frac{lF}{6t\sigma_{zul}}} \approx 0{,}333\,\text{m}$$

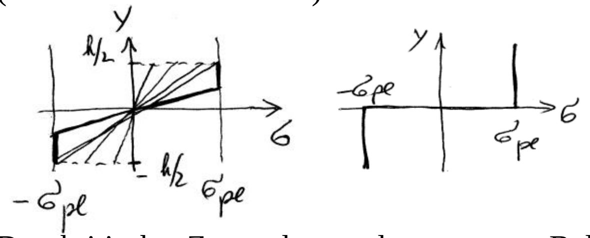
II. Was passiert, wenn die kritische Spannung überschritten wird?



Das reale Spannungs-Dehnungs-Diagramm eines metallischen Werkstoffs (links) wird oft näherungsweise durch das Modell eines "elastisch-ideal plastischen" Mediums ersetzt. Nach diesem Modell steigt die Spannung zunächst linear nach dem Hookeschen Gesetz. Nach Erreichen einer kritischen Spannung σ_{pl} ändert sich die Spannung bei weiterer Deformation nicht mehr. Im elastischen Bereich ist die Spannung gleich $\sigma = Ey/R$. Sie erreicht ihr Maximum bei



$y = \pm h/2$. Danach ändert sie sich nicht mehr (s. untenstehende Skizze).



Der kritische Zustand, wo das gesamte Balkenvolumen plastisch deformiert ist, ist auf der nächsten Skizze gezeigt. Das in diesem Zustand wirkende Moment berechnet sich zu

$$M_p = \int y\,dF = \int y\sigma\,dA = 2\int_0^{h/2} y\sigma_{pl}\,dA = 2\int_0^{h/2} y\sigma_{pl} b\,dy$$

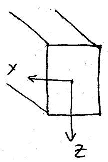
$$= 2\sigma_{pl} b \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\sigma_{pl} bh^2.$$

Zum Vergleich berechnen wir das Kraftmoment im Zustand, wo die Spannung erst an einem einzigen Punkt den kritischen Wert erreicht hat.

$$M_c = \int y\sigma_{el}\,dA = 2\int_0^{h/2} y\frac{y\sigma_{pl}}{h/2}\,dA = \frac{1}{6}\sigma_{pl} bh^2.$$

Wir sehen, dass $M_p = 1{,}5 M_c$. Es gibt also zwei kritische Beigemomente:
M_c ("elastisches Versagen"),
M_p ("plastisches Versagen").

III. Biegung und Längskraft



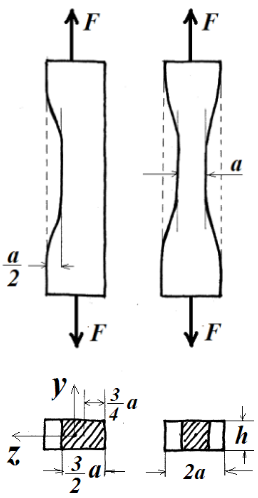
Betrachten wir wieder einen Balken mit einem symmetrischen Profil. Wird er mit einem Kraftmoment M_y belastet, so wird die Spannungsverteilung im Querschnitt durch $\sigma = \frac{M_y}{I_y} z$ gegeben. Bei einer Belastung mit einem Kraftmoment M_z ist die Spannungsverteilung $\sigma = -\frac{M_z}{I_z} y$. Ist der Balken mit einer Normalkraft N belastet (in axialer Richtung), so ist die Zugspannung im Querschnitt homogen und gleich $\sigma = \frac{N}{A}$. Wirken gleichzeitig beide Momente und Normalkraft, so erhält man die Spannung als Summe von drei o.g. Beiträgen (Superpositionsprinzip):

$$\boxed{\sigma = \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{N}{A}}$$

Die Lage der neutralen Fläche bestimmt sich aus der Forderung $\sigma = \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{N}{A} = 0$.

Ist $N = 0$, so ist das eine Gerade $z = \frac{M_z I_y}{M_y I_z} y$ durch den Koordinatenursprung (Schwerpunkt des Querschnitts). Ist $N \neq 0$, so ist das eine verschobene Gerade $z = \frac{M_z I_y}{M_y I_z} y - \frac{N I_y}{M_y A}$.

B3. Proben mit symmetrischer und nicht symmetrischer Verjüngung:



Zu vergleichen sind die maximalen Zugspannungen, die im Querschnitt von nebenstehend skizzierten Proben wirken.

Lösung: Die rechte Probe ist symmetrisch beansprucht, so daß nur reine homogene Zugspannung vorliegt und die Spannung sich einfach als Verhältnis der Kraft zur Querschnittsfläche berechnet: $\boxed{\sigma_{\max}^{rechts} = F/ah}$.

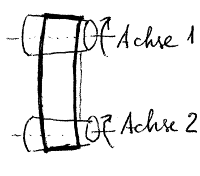
Die linke Probe dagegen ist nicht symmetrisch beansprucht. Bezüglich des Schwerpunkts des verjüngten Querschnitts hat die Kraft $\vec{F}$ ein Moment: $M_y = Fa/4$. Die Spannungen im Querschnitt setzen sich daher zusammen aus den Zugspannungen durch die Kraft $\vec{F}$ und den Zugspannungen durch Biegung mit dem Moment $M_y = Fa/4$. Die letzten erreichen ihr Maximum an der Oberfläche der Probe (im Abstand $\frac{3}{4}a$ vom Schwerpunkt des Querschnitts). Die maximale Spannung ist daher gleich

$$\sigma_{\max}^{links} = \frac{F}{\frac{3}{2}ah} + \frac{M_y}{I_y}\frac{3}{4}a = \frac{2F}{3ah} + \frac{12Fa}{4h\left(\frac{3}{2}a\right)^3}\frac{3}{4}a =$$

$$= \frac{2F}{3ah} + \frac{2F}{3ah} = \boxed{\frac{4F}{3ah}}$$

Sie ist trotz des größeren Querschnitts größer als bei der symmetrischen Probe.

IV. Riemen als Balken

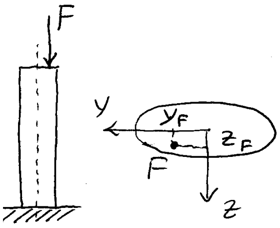


Auch Objekte, die keinen Druck aushalten, können als Balken behandelt werden, wenn sie so gespannt sind, dass an keinem Punkt Druckspannungen wirken.

Außermittiger Zug/Druck. Querschnittskern. Einfluß des Schubes. Spannungstensor

Literatur: ***Hauger, Schnell und Groß.*** **Technische Mechanik 2 (Elastostatik), 4.9, 4.6.2, 1.1, 2.1, 2.2**

I. Außermittiger Zug (Druck)



Wir betrachten eine Säule unter einer exzentrischen Druckkraft *F*. Die Kraft erzeugt sowohl eine Dehnung in der Achsenrichtung als auch Biegemomente um die Achsen *y* und *z:*

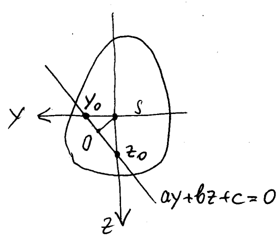
$M_z = Fy_F$, $M_y = -Fz_F$, $N = -F$.

Die Lage der neutralen Fläche ist

$$\frac{Fz_F}{I_y} z + \frac{Fy_F}{I_z} y + \frac{F}{A} = 0, \quad \boxed{\frac{z_F}{I_y} z + \frac{y_F}{I_z} y + \frac{1}{A} = 0}.$$

Ein bißchen analytische Geometrie.

Die Gleichung einer Gerade $ay + bz + c = 0$ kann in der Form $y/y_0 + z/z_0 = 1$, mit $y_0 = -c/a$, $z_0 = -c/b$, geschrieben werden.

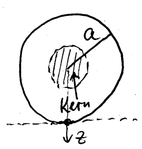


Der Abstand vom Koordinatenursprung zur Geraden ist gleich

$$OS = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{y_0^2} + \frac{1}{z_0^2}}} = \frac{1/A}{\sqrt{\left(\frac{z_F}{I_y}\right)^2 + \left(\frac{y_F}{I_z}\right)^2}}$$

Damit die gesamte Fläche auf Druck beansprucht wird, muss die neutrale Fläche *außerhalb* des Querschnitts liegen. Die Gesamtheit aller Angriffspunkte der Kraft, für die diese Bedingung erfüllt ist, heißt **Querschnittskern.**

B1. Kern eines runden Querschnitts

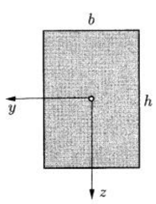


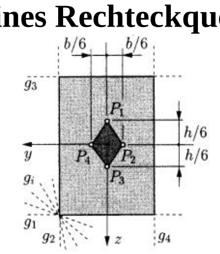
$$OS = \frac{1/\pi a^2}{\sqrt{\left(\frac{z_F}{\pi a^4/4}\right)^2}} \geq a$$

$$\Rightarrow z_F \leq a/4.$$

Der Radius des Kerns ist $a/4$.

B2. Kern eines Rechteckquerschnitts





Betrachten wir zunächst als Nullinien die Seiten des Querschnitts:

1) $z_0 = h/2$, $y_0 = \infty$. Das bedeutet, dass in der Gleichung der Nulllinie $y/y_0 + z/z_0 = 1$ den Term mit *y* gegen Null strebt.

Die Gleichung der Nullinie $\frac{z_F}{I_y} z + \frac{y_F}{I_z} y + \frac{1}{A} = 0$ reduziert sich auf

$\frac{z_F}{I_y} z + \frac{1}{A} = 0$ mit $z = z_0 = \frac{h}{2}$ $\Rightarrow$ $\frac{z_F}{I_y}\frac{h}{2} + \frac{1}{A} = 0$

$$\Rightarrow z_F = -\frac{2I_y}{Ah} = -\frac{2bh^3}{12bh^2} = -\frac{h}{6}, \; y_F = 0.$$

2) $z_0 = \infty$, $y_0 = -b/2 \Rightarrow z_F = 0$, $y_F = b/6$.

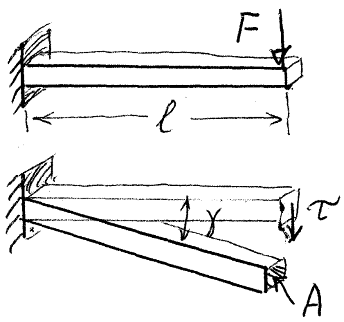
3) $z_0 = -h/2$, $y_0 = \infty \Rightarrow z_F = h/6$, $y_F = 0$.

4) $z_0 = \infty$, $y_0 = b/2 \Rightarrow z_F = 0$, $y_F = -b/6$.

Für eine beliebige Gerade, die durch eine Ecke 1 geht, ist $z_0 = h/2$, $y_0 = b/2$. Die Gleichung $\frac{z_F}{I_y} z_0 + \frac{y_F}{I_z} y_0 + \frac{1}{A} = 0$ stellt eine Gerade auf der Ebene (z_F, y_F) dar. Der Querschnittskern hat somit die Form eines Rhombus.

II. Einfluß des Schubes

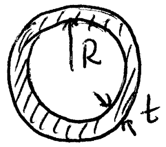
Bei einer Belastung durch eine Querkraft ist die Durchbiegung durch zwei Deformationsarten verursacht:



(a) "reine Biegung" unter Wirkung eines Momentes und (b) eine Scherung durch die Querkraft. Beispielsweise ist bei einem Kragbalken die Absenkung des Angriffspunktes durch Biegung gleich $w_{Biegung} = \frac{Fl^3}{3EI}$. Die Absenkung durch Schub ist gleich $w_{Schub} = l\gamma = l\frac{F}{AG}$. Die gesamte Durchbiegung ist gleich

$$w = \frac{Fl^3}{3EI} + \frac{Fl}{AG}.$$

B3. Rohr



Zu bestimmen ist das Verhältnis der Schub- und Biegebeiträge in die Absenkung eines Kragbalkens mit einem dünnwandigen runden Querschnitt.

Lösung: Das gesuchte Verhältnis ist gleich

$$\frac{w_{Schub}}{w_{Biegung}}=\frac{Fl}{AG}\frac{3EI}{Fl^3}.$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen

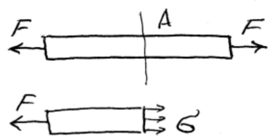
$$A=2\pi Rt,\ I=\pi R^3 t \text{ und } E=2(1+\nu)G$$

erhalten wir

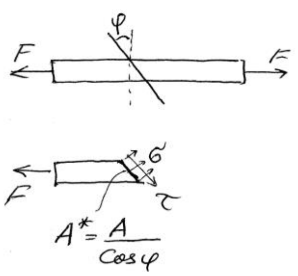
$$\frac{w_{Schub}}{w_{Biegung}}=\frac{3}{2}\frac{E}{G}\frac{R^2}{l^2}=3(1+\nu)\frac{R^2}{l^2}\approx\left(\frac{2R}{l}\right)^2.$$

Die Beiträge werden gleich, wenn der Durchmesser des Rohres gleich seiner Länge ist. Für $l=6R$ beträgt der Schubbeitrag ca. 10%, bei $l=20R$ nur 1%.

III. Spannungen bei einachsiger Dehnung



Betrachten wir einen axial mit einer Kraft F belasteten Stab. Wir machen einen Schnitt senkrecht zur Achse. Die einzige Schnittgröße ist in diesem Fall die Normalkraft $N=F$. Im Schnitt wirkt eine Zugspannung $\sigma=F/A$, die wir als σ_0 bezeichnen.



Machen wir jetzt bei demselben Stab einen schrägen Schnitt (Neigungswinkel φ), so wirkt im Schnitt natürlich immer noch dieselbe axiale Kraft. Sie kann aber jetzt in eine Komponente senkrecht zum Schnitt und eine parallel dazu zerlegt werden. Die Gleichgewichtsbedingungen lauten:

$\rightarrow$: $\sigma A^*\cos\varphi+\tau A^*\sin\varphi-F=0$,

$\uparrow$: $\sigma A^*\sin\varphi-\tau A^*\cos\varphi=0$.

$$\Rightarrow \sigma+\tau\tan\varphi=F/A \text{ und } \sigma\tan\varphi-\tau=0.$$

$$\Rightarrow \tau=\frac{F}{A}\frac{\tan\varphi}{1+\tan^2\varphi}=\frac{F}{A}\sin\varphi\cos\varphi=\frac{F}{2A}\sin 2\varphi,$$

$$\sigma=\frac{F}{A}\frac{1}{1+\tan^2\varphi}=\frac{F}{A}\cos^2\varphi=\frac{F}{2A}(1+\cos 2\varphi).$$

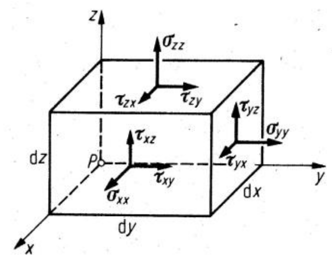
$$\Rightarrow \boxed{\tau=\frac{\sigma_0}{2}\sin 2\varphi},\quad \boxed{\sigma=\frac{\sigma_0}{2}(1+\cos 2\varphi)}$$

Tangentialspannungen erreichen ein Maximum bei $\varphi=\pi/4$. In vielen metallischen Stoffen beginnt plastische Deformation durch Gleiten in Richtung maximaler Schubspannungen (45° zur Zugachse). Bei solchen Stoffen hängen die Fließgrenzen beim Schub und beim Zug wie folgt zusammen: $\sigma_{0,c}=2\tau_c$.

(Photo eines kleinen gedehnten Kupferkristalls)

IV. Spannungstensor

Den Spannungszustand eines Mediums charakterisiert man, indem man im gegebenen Punkt verschiedene Schnitte macht und die dort wirkenden Spannungen untersucht. Betrachten wir die drei Schnitte senkrecht zu den *x*, *y* und *z*- Achsen. Diese Schnittspannungen werden mit zwei Indizes gekennzeichnet,



von denen der erste den Normalvektor zum Schnitt angibt und der zweite die Richtung der im Schnitt wirkenden Kraftkomponente. Insgesamt gibt es 9 Spannungskomponenten, die man in einer Matrix anordnen kann:

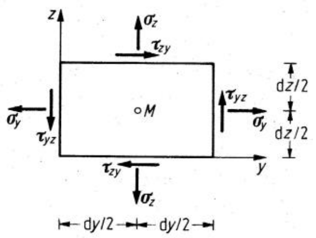
$$\hat{\sigma}=\begin{pmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{pmatrix}.$$

Diese Matrix heißt **Spannungstensor**.

Oft wird auch die folgende Bezeichnung benutzt:

$$\hat{\sigma}=\begin{pmatrix}\sigma_{x} & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_{y} & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{z}\end{pmatrix}.$$

V. Symmetrie des Spannungstensors



Untersuchen wir das Momentengleichgewicht für ein infinitesimal kleines Volumenelement mit den Abmessungen dx, dy und dz um eine zur x-Achse parallele Achse (bezüglich des Mittelpunktes):

$$2\frac{\mathrm{d}y}{2}\tau_{yz}\mathrm{d}x\mathrm{d}z-2\frac{\mathrm{d}z}{2}\tau_{zy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0\ \Rightarrow\ \tau_{yz}=\tau_{zy}.$$

$$\boxed{\tau_{xy}=\tau_{yx},\quad \tau_{xz}=\tau_{zx},\quad \tau_{yz}=\tau_{zy}}$$

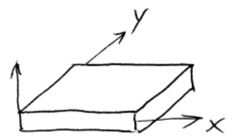
Es gibt somit nur 6 unabhängige Komponenten des Spannungstensors.

Ebener Spannungszustand. Hauptachsen und Hauptspannungen. Mohrscher Spannungskreis.

Literatur: ***Hauger, Schnell und Groß.*** **Technische Mechanik 2 (Elastostatik), 2.2., 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3, 2.2.4**

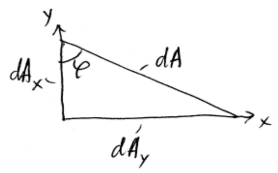
I. Ebener Spannungszustand

Betrachten wir eine homogene Platte, die nur in ihrer Ebene beansprucht wird (also auch im deformierten Zustand eben bleibt). Alle Kräfte an ihren Flächen sind Null. Das bedeutet, dass $\tau_{zx} = \tau_{zy} = \sigma_z = 0$. Aus der Symmetrieeigenschaft folgt: $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$:

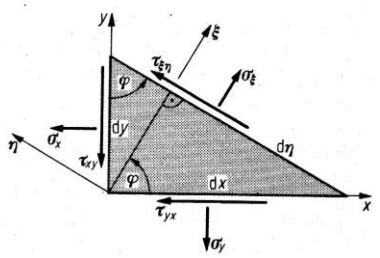


$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

II. Koordinatentransformation



$$\boxed{\begin{aligned} dA_y &= dA \sin\varphi \\ dA_x &= dA \cos\varphi \end{aligned}}$$



Betrachten wir einen ebenen Spannungszustand und schneiden aus dem Medium ein infinitesimal kleines Dreieck. Betrachten wir das Kräftegleichgewicht in den Achsen (ξ,η), die relativ zu den Achsen (x, y) um den Winkel φ gedreht sind:

$$\xi: \quad \begin{aligned} &\sigma_\xi dA - \left(\sigma_y dA_y\right)\sin\varphi - \left(\tau_{yx} dA_y\right)\cos\varphi \\ &-\left(\sigma_x dA_x\right)\cos\varphi - \left(\tau_{xy} dA_x\right)\sin\varphi = 0 \end{aligned}$$

$$\eta: \quad \begin{aligned} &\tau_{\xi\eta} dA - \left(\sigma_y dA_y\right)\cos\varphi + \left(\tau_{yx} dA_y\right)\sin\varphi \\ &+\left(\sigma_x dA_x\right)\sin\varphi - \left(\tau_{xy} dA_x\right)\cos\varphi = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \sigma_\xi = \sigma_y \sin^2\varphi + \tau_{yx}\sin\varphi\cos\varphi + \sigma_x\cos^2\varphi + \tau_{xy}\sin\varphi\cos\varphi \\ \tau_{\xi\eta} = \sigma_y \sin\varphi\cos\varphi - \tau_{yx}\sin^2\varphi - \sigma_x\sin\varphi\cos\varphi + \tau_{xy}\cos^2\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_\xi = \sigma_y \sin^2\varphi + 2\tau_{yx}\sin\varphi\cos\varphi + \sigma_x\cos^2\varphi \\ \tau_{\xi\eta} = -\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\sin\varphi\cos\varphi + \tau_{xy}\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) \\ \sigma_\eta = \sigma_y\cos^2\varphi - 2\tau_{yx}\sin\varphi\cos\varphi + \sigma_x\sin^2\varphi \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_\xi &= \tfrac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) + \tfrac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\cos 2\varphi + \tau_{yx}\sin 2\varphi \\ \sigma_\eta &= \tfrac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) - \tfrac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\cos 2\varphi - \tau_{yx}\sin 2\varphi \\ \tau_{\xi\eta} &= -\tfrac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi \end{aligned}}$$

Schlussfolgerungen:

1. Die vier Komponenten des Spannungstensors (in 2D) und 9 (in 3D) bestimmen vollständig den Spannungszustand.

2. Es gibt Invarianten des Spannungstensors:

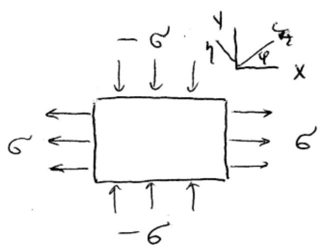
$I_1 = \sigma_x + \sigma_y$ (Spur der Matrix)

$I_2 = \sigma^2{}_x + \tau^2{}_{xy} + \tau^2{}_{yx} + \sigma^2{}_y$.

B1. In einem Koordinatensystem gilt $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$, $\tau_{xy} = 0$. Zu bestimmen ist der Spannungszustand in einem beliebig orientierten Koordinatensystem.

Lösung: $\sigma_\xi = \sigma_\eta = \sigma$, $\tau_{\xi\eta} = 0$. Diesen Spannungszustand nennt man *hydrostatischen Spannungszustand.*

B2. Ein Block ist in einer Richtung auf Zug und in Querrichtung auf Druck mit der gleichen Spannung σ belastet. Zu bestimmen ist der Spannungstensor in einem beliebig orientierten Koordinatensystem.



Lösung: $\sigma_x = \sigma$, $\sigma_y = -\sigma$, $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$

$\sigma_\xi = \sigma\cos 2\varphi$, $\sigma_\eta = -\sigma\cos 2\varphi$,

$\tau_{\xi\eta} = -\sigma\sin 2\varphi$.

Für $\varphi = \pi/4$ ist $\sigma_\xi = 0$, $\sigma_\eta = 0$, und

$\tau_{\xi\eta} = \tau_{\eta\xi} = -\sigma$.

Im Koordinatensystem (*x*,*y*) ist das Material auf Zug und Druck beansprucht, im System (ξ,η) ist das reiner Schub.

B3. Ein Material wird auf reinen Schub beansprucht. Zu bestimmen ist der Spannungstensor in einem beliebig orientierten System.

Lösung: $\sigma_x = \sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau$.

$\sigma_\xi = \tau\sin 2\varphi$, $\sigma_\eta = -\tau\sin 2\varphi$, $\tau_{\xi\eta} = \tau\cos 2\varphi$.

Für $\varphi = \pi/4$ gilt $\tau_{\xi\eta} = 0$, $\sigma_\xi = \tau$, $\sigma_\eta = -\tau$.

B4. Eine Säule ist auf Druck belastet ($\sigma_x = -\sigma$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$). In welchem Querschnitt ist die Schubspannung maximal?

$\tau = \left(-\sigma/2\right)\sin 2\varphi$. $\varphi = 45°$ (Bruchwinkel spröder Stoffe unter Druck).

III. Hauptachsen und Hauptspannungen

1. Man kann die Achsen immer so wählen, dass die Schubspannungen verschwinden. Gleichzeitig nehmen die Zugspannungen (Diagonalkomponenten) ihren extremalen Wert an:

$$\tan 2\varphi^* = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y},$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\,.$$

2. Andererseits gibt es immer Achsenrichtungen, bei denen die Schubspannungen ein Maximum erreichen:

$$\frac{d\tau_{\xi\eta}}{d\varphi} = -\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\cos 2\tilde{\varphi} - 2\tau_{xy}\sin 2\tilde{\varphi} = 0$$

$$\Rightarrow \cot 2\tilde{\varphi} = -\frac{2\tau_{xy}}{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)} = -\tan 2\varphi^*$$

Dafür muss offenbar gelten: $2\tilde{\varphi} = 2\varphi^* + \pi/2$.

In der Tat gilt

$\cos 2\tilde{\varphi} = \cos\left(2\varphi^* + \pi/2\right) = -\sin\left(2\varphi^*\right)$,

$\sin 2\tilde{\varphi} = \sin\left(2\varphi^* + \pi/2\right) = \cos\left(2\varphi^*\right)$ und

$\cot 2\tilde{\varphi} = -\tan 2\varphi^*$.

Die Achsenrichtungen, in denen die Schubspannungen maximal sind, sind zu den Hauptachsen um 45° gedreht. Die Extremalwerte der Schubspannung heißen **Hauptschubspannungen:**

$$\boxed{\tau_{\max} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}\,.$$

Mit Hilfe der Hauptspannungen gilt:

$$\boxed{\tau_{\max} = \pm\frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)}\,.$$

Dabei sind die Normalspannungen

$\sigma = \frac{1}{2}\left(\sigma_y + \sigma_x\right) = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 + \sigma_2\right)$.

IV. Mohrscher Spannungskreis

Schreibt man die Transformationsformeln um:

$$\sigma_\xi - \tfrac{1}{2}\left(\sigma_y + \sigma_x\right) = \tfrac{1}{2}\left(\sigma_y - \sigma_x\right)\cos 2\varphi + \tau_{yx}\sin 2\varphi$$

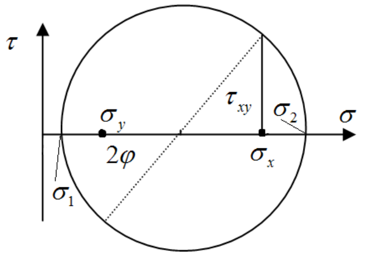
$$\tau_{\xi\eta} = -\tfrac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi,$$

so kann durch Quadrieren und Addieren der Winkel φ eliminiert werden:

$$\left[\sigma_\xi - \tfrac{1}{2}\left(\sigma_y + \sigma_x\right)\right]^2 + \tau_{\xi\eta}^2 = \left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

Den Ausdruck auf der rechten Seite bezeichnen wir als $\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 = r^2$ und den Mittelwert der Diagonalspannungen als $\sigma_M = \frac{1}{2}\left(\sigma_y + \sigma_x\right)$. Somit gilt für σ_ξ und $\tau_{\xi\eta}$: $\left[\sigma_\xi - \sigma_M\right]^2 + \tau_{\xi\eta}^2 = r^2$. Im Weiteren lassen wie die Indizes aus: $\left[\sigma - \sigma_M\right]^2 + \tau^2 = r^2$.

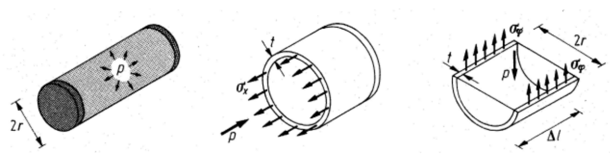
Dies ist die Gleichung eines Kreises in der $\left(\sigma, \tau\right)$-Ebene mit dem Zentrum im Punkt σ_M und dem Radius r. Dese Überlegungen können zur grafischen Bestimmung von Hautspannungen, maximalen Schubspannungen und Hauptachsen benutzt werden.



So geht es: Gegeben seien σ_x, σ_y und τ_{xy}. Der Punkt (σ_x, τ_{xy}) liegt auf dem Kreis, der Punkt $\left(\sigma_M, 0\right)$ liegt in der Mitte des Kreises, somit ist der gesamte Kreis eindeutig bestimmt. An dem Kreis können jetzt problemlos die Hauptspannungen und die maximale Schubspannung abgelesen werden.

V. Dünnwandiger Kessel

Ein dünnwandiger zylindrischer Kessel mit dem Radius *r* und der Wandstärke *t* stehe unter dem Druck *p*. Zu ermitteln ist der Spannungszustand.



Ein Schnitt senkrecht zur Achse ergibt :

$$\sigma_x 2\pi r t - p\pi r^2 = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\sigma_x = \frac{pr}{2t}}\,.$$

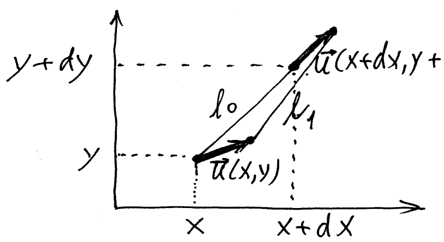
Ein Schnitt entlang der Achse ergibt:

$$2\sigma_\varphi t\Delta l - p2r\Delta l = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\sigma_\varphi = \frac{pr}{t}}$$

Wegen $r \gg t$ gilt $\sigma_x, \sigma_\varphi \gg \sigma_r$. Der Spannungszustand kann daher als eben betrachtet werden. Die maximale Schubspannung ist $\tau_{\max} = \frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \sigma_2\right) = \frac{pr}{4t}$, sie wirkt in Schnitten unter 45° zur Achse. Plastische Deformation wird daher in Richtung 45° initiiert werden.

I. Verzerrungstensor

Nicht jede Bewegung eines elastischen Körpers ist mit seiner Deformation verbunden: Verschiebung als Ganzes oder Rotation als Ganzes sind Beispiele von Bewegungen ohne Verzerrung. Ein offensichtliches Merkmal einer "richtigen" Verzerrung ist Änderung der Abstände zwischen den Punkten des Körpers. Betrachten wir als erstes einen *ebenen* Verzerrungszustand.



Wählen wir im *nicht deformierten* Zustand eines elastischen Körpers zwei nahe liegende Punkte mit Koordinaten (x, y) und $(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y)$. Wird der Körper deformiert, so verschieben sich diese beiden Punkte in neue Positionen $(x+u_x(x,y), y+u_y(x,y))$ und $(x+\mathrm{d}x+u_x(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y),$

$$y+\mathrm{d}y+u_y(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y)).$$

Der ursprüngliche Abstand zwischen den Punkten war $l_0^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$. Der Abstand nach der Deformation ist gleich

$$l_1^2 = \left(\mathrm{d}x + u_x(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y) - u_x(x,y)\right)^2 + \\ +\left(\mathrm{d}y + u_y(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y) - u_y(x,y)\right)^2 .$$

Mit Hilfe von Taylor-Reihen erhalten wir

$$u_x(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y) - u_x(x,y) \approx \frac{\partial u_x}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u_x}{\partial y}\mathrm{d}y,$$

$$u_y(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y) - u_y(x,y) \approx \frac{\partial u_y}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u_y}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

Berechnung der Längenänderung unter Beibehaltung Glieder kleinster (2.) Ordnung ergibt

$$l_1^2 - l_0^2 = \\ = 2\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\mathrm{d}x^2 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial u_y}{\partial y}\mathrm{d}y^2\right)$$

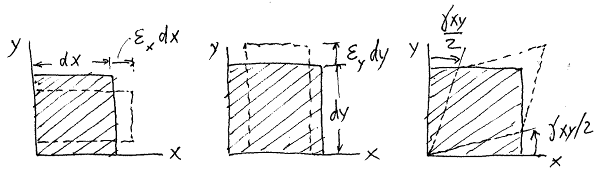
Die Abstandsänderung in *einer beliebigen Richtung* und somit der Deformationszustand ist eindeutig bestimmt durch die drei Größen

$$\boxed{\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}}, \boxed{\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}} \text{ und } \boxed{\gamma_{xy} = \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)}.$$

Sie sind Komponenten eines symmetrischen *Verzerrungstensors*

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{bmatrix}.$$

Den mechanischen Sinn einzelner Komponenten des Verzerrungstensors kann man den folgenden Skizzen entnehmen.



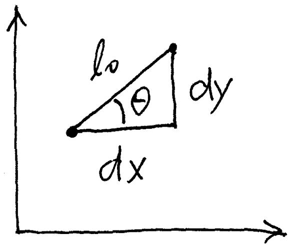
Die Komponenten ε_x und ε_y auf der Hauptdiagonale nennt man *Dehnungen*, die auf der Nebendiagonale *Gleitung, Scherung* oder *Winkelverzerrung.*

II. Dehnung als Funktion des Winkels

Mit Hilfe des Verzerrungstensors kann die Abstandsänderung zwischen zwei Punkten wie folgt umgeschrieben werden

$$l_1^2 - l_0^2 = 2\left(\varepsilon_x \mathrm{d}x^2 + \gamma_{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \varepsilon_y \mathrm{d}y^2\right)$$

oder $l_0 \mathrm{d}l = \varepsilon_x \mathrm{d}x^2 + \gamma_{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \varepsilon_y \mathrm{d}y^2$.



Aus der Skizze ist sichtbar, dass $dx = l_0 \cos\theta$ und $dy = l_0 \sin\theta$. Dies setzen wir in die oben stehende Gleichung ein und erhalten

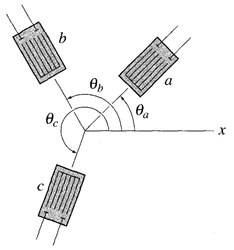
$$l_0 \mathrm{d}l = l_0^2\left(\varepsilon_x \cos^2\theta + \gamma_{xy}\cos\theta\sin\theta + \varepsilon_y \sin^2\theta\right)$$

Für die Dehnung $\varepsilon(\theta) = \mathrm{d}l / l_0$ in Richtung θ ergibt sich

$$\boxed{\varepsilon(\theta) = \varepsilon_x \cos^2\theta + \gamma_{xy}\cos\theta\sin\theta + \varepsilon_y \sin^2\theta} \qquad (1)$$

III. Messung von Deformationen mit Dehnungsmessstreifenrosetten

Zur Messung von Deformationen werden oft Dehnungsmeßstreifen benutzt, deren elektrischer Widerstand von der Dehnung des Streifens in Richtung seiner Achse abhängt. Zur Messung von allen drei Komponenten des Verzerrungstensors muß man drei nahe an einander liegende Streifen benutzen: die Dehnungsmessstreifenrosetten.

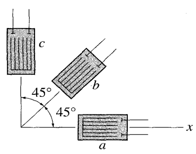


Betrachten wir zunächst eine Rosette mit beliebigen Winkeln. Die durch einzelne Streifen gemessenen Dehnungen sind:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_x \cos^2\theta_a + \gamma_{xy}\cos\theta_a \sin\theta_a + \varepsilon_y \sin^2\theta_a$$
$$\varepsilon_b = \varepsilon_x \cos^2\theta_b + \gamma_{xy}\cos\theta_b \sin\theta_b + \varepsilon_y \sin^2\theta_b$$
$$\varepsilon_c = \varepsilon_x \cos^2\theta_c + \gamma_{xy}\cos\theta_c \sin\theta_c + \varepsilon_y \sin^2\theta_c$$

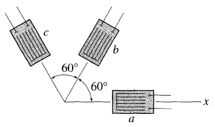
Auflösung dieses Gleichungssystems bezüglich ε_x, ε_y, γ_{xy} liefert alle drei Komponenten des Verzerrungstensors.

45°-Rosette ($\theta_a = 0$, $\theta_b = 45°$, $\theta_c = 90°$):



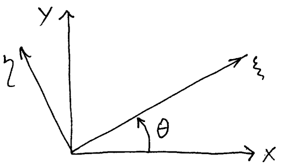
$$\varepsilon_x = \varepsilon_a$$
$$\varepsilon_y = \varepsilon_c$$
$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c$$

60°-Rosette ($\theta_a = 0$, $\theta_b = 60°$, $\theta_c = 120°$):



$$\varepsilon_x = \varepsilon_a$$
$$\varepsilon_y = \tfrac{1}{3}\left(2\varepsilon_b + 2\varepsilon_c - \varepsilon_a\right)$$
$$\gamma_{xy} = \tfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\varepsilon_b - \varepsilon_a\right)$$

IV. Koordinatentransformation



Die Gleichung (1) kann man auch allgemeiner Interpretieren: $\varepsilon(\theta)$ ist offenbar die ε_ξ-Dehnung im gedrehten Koordinatensystem. Die ε_η-Dehnung in der Senkrechten zur ξ-Achse bekommen wir aus (1) durch Substitution $\theta \to \theta + \pi/2$, $\cos(\theta+\pi/2) = -\sin\theta$, $\sin(\theta+\pi/2) = \cos\theta$:

$$\varepsilon(\theta+\pi/2) = \varepsilon_x \sin^2\theta - \gamma_{xy}\cos\theta\sin\theta + \varepsilon_y \cos^2\theta$$

Zusammenfassend gilt:

$$\varepsilon_\xi = \varepsilon_x \cos^2\theta + \gamma_{xy}\cos\theta\sin\theta + \varepsilon_y \sin^2\theta,$$
$$\varepsilon_\eta = \varepsilon_x \sin^2\theta - \gamma_{xy}\cos\theta\sin\theta + \varepsilon_y \cos^2\theta,$$

oder umgeformt:

$$\varepsilon_\xi = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta$$
$$\varepsilon_\eta = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta$$
$$\frac{\gamma_{\xi\eta}}{2} = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta.$$

(Die letzte Gleichung haben wir hier ohne Beweis hinzugefügt).

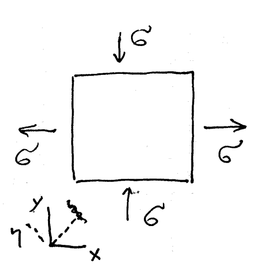
Es gibt immer zwei senkrecht zu einander stehende Achsen, in denen die Dehnungen maximale Werte erreichen und Winkelverzerrungen verschwinden – das *Hauptachsensystem*. Seine Orientierung ist gegeben durch

$$\boxed{\tan 2\theta^* = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}}.$$

Die *Hauptdehnungen* sind

$$\boxed{\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}}.$$

B2. Zu untersuchen ist der Spannungs- und Deformationszustand eines wie nebenstehend beanspruchten Elementes einer Struktur.



Lösung: Die Achsen (x,y) sind Hauptachsen des Spannungstensors. Die Spannungskomponenten $\sigma_x = \sigma$ und $\sigma_y = -\sigma$ sind die Hauptspannungen. Die Hauptspannung in x-Richtung verursacht die folgenden Dehnungen:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma}{E},\ \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x = -\nu\frac{\sigma}{E}.$$

Die Hauptspannung in y-Richtung verursacht die folgenden Dehnungen:

$$\varepsilon_y = -\frac{\sigma}{E},\ \varepsilon_x = -\nu\varepsilon_y = \nu\frac{\sigma}{E}.$$

Bei gleichzeitiger Wirkung gilt nach dem Superpositionsprinzip:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma}{E}(1+\nu),\ \varepsilon_y = -\frac{\sigma}{E}(1+\nu).$$

Auch für den Verzerrungstensor ist es das Hauptachsensystem. Im Koordinatensystem (ξ,η) gedreht um 45° zu den Hauptachsen gibt es nur Schubkomponenten des Spannungs- und des Verzerrungstensors:

$$\tau_{\xi\eta} = \sigma,\ \frac{\gamma_{\xi\eta}}{2} = \frac{\sigma}{E}(1+\nu) = \frac{\tau}{E}(1+\nu).$$

Der Koeffizient zwischen Schubspannung und Schubwinkel ist der Schubmodul:

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}}.$$

Knickung

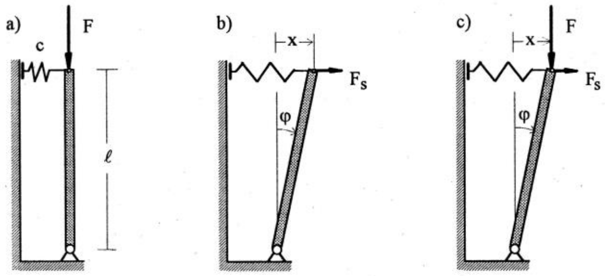
Literatur: ***Hauger, Schnell und Groß.*** **Technische Mechanik 2 (Elastostatik), 7.2**

I. Der Begriff der Stabilität

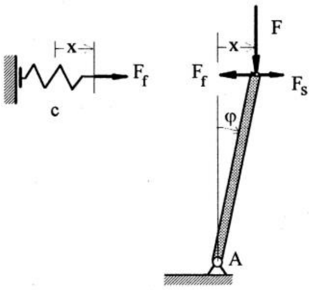
Eine Gleichgewichtslage ist stabil, wenn das System nach einer kleinen Störung des Gleichgewichtes wieder in die ursprüngliche Position zurückkehrt.

II. Statische Stabilität von Feder-Stab-Systemen

Zur Einführung betrachten wir einen gelenkig gelagerten starren Stab, der durch eine Feder gehalten wird.



Unter der Wirkung einer Kraft F in der Längsrichtung verschiebt sich der Stab nicht (a). Unter Einwirkung einer kleinen Störkraft F_s verschiebt es sich geringfügig (b). Wenn aber beide Kräfte gleichzeitig wirken, kann es zu einer großen Auslenkung kommen, auch wenn die Störkraft unendlich klein ist: es tritt eine Instabilität auf.



Bei der Untersuchung des Gleichgewichtes nehmen wir an, daß alle Winkel und Auslenkungen sehr klein sind. Wir werden alle Terme zweiter oder höherer Ordnung vernachlässigen (dieses Vorgehen nennt man *Theorie zweiter Ordnung*). Unter anderem gilt in dieser Näherung:

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - ... \approx \varphi ,$$

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - ... \approx 1,$$

In der gleichen Näherung ist $x = l\varphi$.

Für die Federkraft gilt $F_f = cx$. Die Momentengleichgewichtsbedingung bezüglich des Gelenkes A lautet:

$$\left(F_f - F_s\right) l \cos\varphi - Fx = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(cx - F_s\right) l \cdot 1 - Fx = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x = \frac{F_s l}{cl - F} .$$

Offenbar ist $\lim\limits_{F \to cl} \dfrac{F_s l}{cl - F} = \infty$.

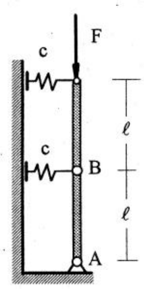
Instabilitätsbedingung aus anderer Sicht:

Gibt es keine Störkraft, so lautet die Gleichgewichtsbedingung: $\left(cl - F\right)x = 0$.

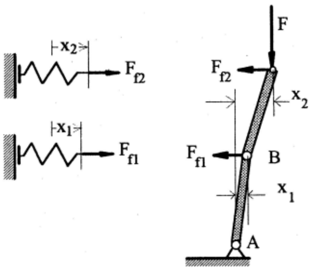
Bei $F \neq cl$ hat diese Gleichung eine einzige Lösung $x = 0$. Bei der kritischen Kraft $F = cl$ dagegen, kann x einen *beliebigen Wert* annehmen.

Das liegt daran, daß zwischen einem stabilen und einem instabilen Zustand immer ein indifferenter Zustand liegt. *Wir können diesen kritischen Zustand gerade daran erkennen, daß es unendlich viele Gleichgewichtspositionen gibt.*

B1. Wie groß ist die kritische Last für dieses Zweistabsystem?



Lösung: Wir lassen kleine Verschiebungen des Systems aus der geraden Lage zu und stellen Gleichgewichtsbedingungen *am verformten* System auf. Unser Anliegen ist festzustellen, unter welchen Bedingungen sich das System im indifferenten Gleichgewicht befindet. Das ist gerade der kritische Zustand. Das Momentengleichgewicht für das *Gesamtsystem* bezüglich des Gelenkes *A* lautet



$$F_{f1} l + 2F_{f2} l - Fx_2 = 0$$

Das Momentengleichgewicht für den *oberen Stab* bezüglich des Gelenkes *B* lautet

$F_{f2} l - F(x_2 - x_1) = 0$. Mit den Federkräften $F_{f1} = cx_1$, $F_{f2} = cx_2$ führen die Gleichungen auf

$$clx_1 + \left(2cl - F\right)x_2 = 0 ,$$

$$Fx_1 + \left(cl - F\right)x_2 = 0 .$$

Die kritische Last ist die Größe, bei der es unendlich viele Gleichgewichtslagen gibt. Ein lineares Gleichungssystem hat nur dann nicht triviale Lösungen, wenn seine Determinante gleich Null ist:

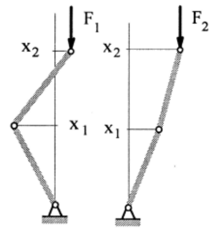
$$\begin{vmatrix} cl & 2cl-F \\ F & cl-F \end{vmatrix} = F^2 - 3clF + (cl)^2 = 0 .$$

Diese *charakteristische Gleichung* hat zwei Lösungen

$F_{1,2} = \left(1.5 \pm \sqrt{1.25}\right) cl$ und damit ist

$F_1 = 0.38cl$ und $F_2 = 2.62cl$.

Die Lösungen selbst sind:



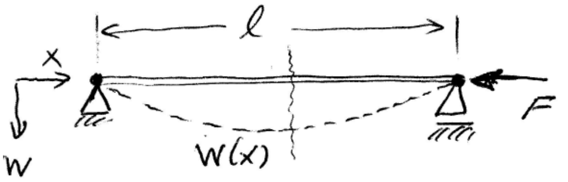
bei F_1 : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = const_1 \begin{pmatrix} -0.85 \\ 0.53 \end{pmatrix}$,

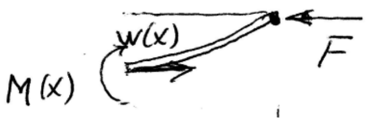
bei F_2 : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = const_2 \begin{pmatrix} 0.53 \\ 0.85 \end{pmatrix}$.

Das sind die *Knickeigenformen.*

III. Knickstab

Betrachten wir den unten abgebildeten Stab.





Durch Freischneiden bei einer Koordinate x wird das Biegemoment sichtbar. Das Momentengleichgewicht *bezüglich des Schnittpunktes* lautet:

$$-M(x) + Fw(x) = 0$$

Für das Biegemoment gilt aber

$$M(x) = -EIw''(x) .$$

Daraus ergibt sich die Gleichung

$EIw''(x) + Fw(x) = 0$ oder

$$\boxed{w''(x) + \lambda^2 w(x) = 0 \quad \text{mit} \quad \lambda^2 = \frac{F}{EI}} .$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist

$$\boxed{w(x) = A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x)}.$$

Die Konstanten A und B werden aus den Randbedingungen bestimmt. In diesem Fall:

$$w(0) = w(l) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0 ,\ A\sin\lambda l = 0 .$$

Die letztere Gleichung ist erfüllt entweder wenn $A = 0$ oder wenn $\sin\lambda l = 0$. Nur die letztere Bedingung entspricht einer nicht trivialen Lösung. Daraus folgt $\lambda l = \pi n$ (n ist eine ganze Zahl),

$$\lambda^2 = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 = \frac{F}{EI} \quad \Rightarrow \boxed{F_k = EI\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2}.$$

Die Eigenformen sind $\boxed{w(x) = A\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)}$

IV. Knickspannungen

Die Druckspannung bei der kritischen Knicklast ist gleich $\sigma_{Knick} = \frac{F_k}{A} = \frac{\pi^2 EI}{Al^2}$.

Vergleichen wir diese Spannung mit der Spannung σ_{pl} , bei der der Stab durch plastische Deformation versagt. Die beiden Spannungen sind gleich wenn $\frac{\pi^2 EI}{Al^2} = \sigma_{pl}$.

Für einen runden Stab mit dem Radius a gilt

$$I = \frac{\pi a^4}{4} ,\ A = \pi^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi^2 a^2}{4l^2} = \frac{\sigma_{pl}}{E}$$

$$\Rightarrow \frac{l}{a} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{E}{\sigma_{pl}}} .$$

Für Stahl: $E \approx 200\,\text{GPa}$, $\sigma_{pl} \approx 500\,\text{MPa}$,

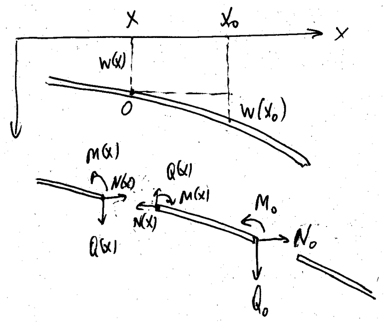
$\frac{l}{a} \approx 1.5\sqrt{400} = 30$ oder $\frac{l}{d} \approx 15$.

Stählerne Stäbe mit $\frac{l}{d} < 15$ versagen durch plastische Deformation. Stäbe mit $\frac{l}{d} > 15$ versagen durch Knickung.

Knickung (Fortsetzung). Eulersche Knickfälle

Literatur: ***Hauger, Schnell und Groß.*** **Technische Mechanik 2 (Elastostatik), 7.2**

I. Eulersche Knickungsgleichung vierter Ordnung



Ein Stab sei in der x-Richtung auf Druck mit einer Kraft F belastet. Wir schneiden ein Element zwischen x und x_0 frei und stellen Gleichgewichtsbedingungen auf. Das Kräftegleichgewicht in x- und w-Richtung ergibt

$$N(x) = N_0 = -F,$$

$$Q(x) = Q_0.$$

Das Momentengleichgewicht bezüglich O:

$$-M(x) + M_0 + N_0\left(w(x_0) - w(x)\right) - Q_0\left(x_0 - x\right) = 0.$$

Unter Benutzung der Balkengleichung folgt:

$$EIw''(x) = -M(x) = -M_0 - N_0\left(w(x_0) - w(x)\right) + Q_0\left(x_0 - x\right)$$

$$= -M_0 + F\left(w(x_0) - w(x)\right) + Q_0\left(x_0 - x\right).$$

Zweimaliges Differenzieren ergibt

$$\boxed{\left(EIw''(x)\right)'' = -Fw''(x)} \text{ (Eulersche Gleichung).}$$

Für einen homogenen Stab $(EI = const)$ folgt:

$$EIw^{IV}(x) = -Fw''(x)$$

oder $\boxed{w^{IV}(x) = -\lambda^2 w''(x)}$ mit $\boxed{\lambda^2 = F / EI}$.

Diese Gleichung enthält zunächst *keine Randbedingungen* und kann daher in allgemeiner Form gelöst werden.
Es ist leicht zu prüfen, dass folgende Funktionen Lösungen der Eulerschen Gleichung sind:

$w_1(x) = A\cos\lambda x$, $w_2(x) = B\sin\lambda x$,

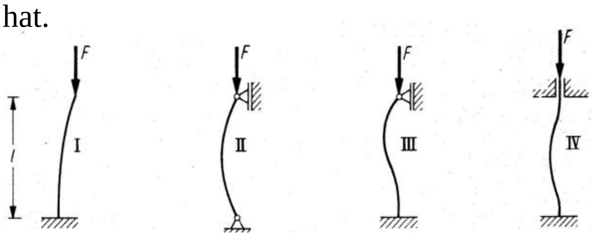
$w_3(x) = Cx$, $w_4(x) = D$.

Die allgemeine Lösung lautet somit

$$\boxed{w(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x + Cx + D}. \quad (1)$$

II. Eulersche Knickfälle

Abhängig von der Lagerung unterscheidet man vier Fälle, die bereits Leonard Euler untersucht hat.



Fall II: Randbedingungen:

$w(0) = 0$, $w''(0) = 0$, $w(l) = 0$, $w''(l) = 0$.

Einsetzen in die allgemeine Lösung (1) liefert:

$$\left.\begin{aligned} w(0) &= A\cos 0 + B\sin 0 + C0 + D = A + D = 0 \\ w''(0) &= -A\lambda^2\cos 0 - B\lambda^2 \sin 0 = -A\lambda^2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow$ $A = 0$, $D = 0$.

$$\left.\begin{aligned} w(l) &= B\sin\lambda l + Cl = 0 \\ w''(l) &= -\lambda^2 B\sin\lambda l = 0 \end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow$ $C = 0$, $\sin\lambda l = 0$ $\Rightarrow$ $\lambda l = \pi n$

(n ist eine ganze Zahl),

$$\lambda^2 = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 = \frac{F}{EI} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_k = EI\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2}.$$

Fall IV: Die Randbedingungen lauten:

$w(0) = 0$, $w'(0) = 0$, $w(l) = 0$, $w'(l) = 0$.

Daraus folgt:

$$w(0) = A\cos 0 + B\sin 0 + C0 + D = A + D = 0$$

$$w'(0) = -A\lambda\sin 0 + B\lambda\cos 0 + C = B\lambda + C = 0$$

$$\left.\begin{aligned} w(l) &= A\cos\lambda l + B\sin\lambda l + Cl + D \\ &= A\cos\lambda l + B\sin\lambda l - B\lambda l - A = 0 \\ w'(l) &= -A\lambda\sin\lambda l + B\lambda\cos\lambda l + C \\ &= -A\lambda\sin\lambda l + B\lambda\cos\lambda l - B\lambda = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} (\cos\lambda l - 1) & (\sin\lambda l - \lambda l) \\ -\lambda\sin\lambda l & \lambda(\cos\lambda l - 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Gleichung hat nur dann nicht-triviale Lösungen wenn die Determinante verschwindet:

$$\begin{vmatrix} (\cos\lambda l - 1) & (\sin\lambda l - \lambda l) \\ -\lambda\sin\lambda l & \lambda(\cos\lambda l - 1) \end{vmatrix}$$

$$= \lambda\left[\left(\cos\lambda l - 1\right)^2 + \sin\lambda l\left(\sin\lambda l - \lambda l\right)\right] =$$

$$= \lambda\left[2\left(1 - \cos\lambda l\right) - \lambda l\sin\lambda l\right] = 0$$

Diese Gleichung ist erfüllt für

$$\lambda l = 2\pi n, \quad F_k = 4EI\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2.$$

Fall I: Die Randbedingungen lauten in diesem Fall:

$w(0) = 0$, $w'(0) = 0$, $w''(l) = 0$

$Q(l) = EIw'''(l) = -w'(l)F$.

Daraus folgt:

$w(0) = A + D = 0$

$w'(0) = B\lambda + C = 0$

$$w''(l) = -A\lambda^2 \cos\lambda l - B\lambda^2 \sin\lambda l = 0$$
$$w'''(l) = A\lambda^3 \sin\lambda l - B\lambda^3 \cos\lambda l$$
$$= -\frac{F}{EI}\left(-A\lambda \sin\lambda l + B\lambda \cos\lambda l + C\right)$$

Wegen $C = -\lambda B$ und $\lambda^2 = F / EI$ ergibt sich

$$\begin{pmatrix} -\lambda^2 \cos\lambda l & -\lambda^2 \sin\lambda l \\ 0 & -\lambda^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda^2 \cos\lambda l & -\lambda^2 \sin\lambda l \\ 0 & -\lambda^3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \cos\lambda l = 0,$$

$$\Rightarrow \lambda l = \pi / 2 + n\pi\,,\ F_k = \frac{1}{4} EI \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$$

Aufgabe: Ein zwischen zwei festen Wänden gespannter stählerner Stab mit $l / a = 100$ wird gleichmäßig erwärmt. Bei welcher Temperaturerhöhung ΔT knickt der Stab? $\left(\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5} K^{-1}\right)$.

Lösung: Die Thermische Spannung ist gleich $\sigma_T = -E\alpha\Delta T$. Die resultierende Druckkraft $|F| = |\sigma_T A| = E\alpha\Delta T A$ muss den kritischen Wert $F_k = \pi^2 EI / l^2$ erreichen: $E\alpha\Delta T A = \pi^2 EI / l^2$.

Der Stab wird instabil bei $\Delta T = \dfrac{\pi^2 EI}{AE\alpha l^2}$.

Für einen runden Stab mit Radius a gilt:

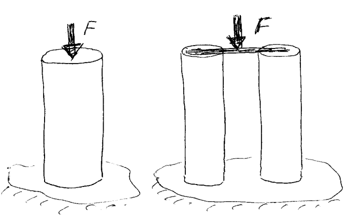
$$\Delta T = \frac{\pi^2 \pi a^4}{4\pi a^2 \alpha l^2} = \frac{\pi^2 a^2}{4\alpha l^2} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{\alpha}\left(\frac{a}{l}\right)^2$$

Für $a / l = 100$ ergibt sich

$$\Delta T \approx \frac{1}{4}\frac{10 \cdot 10^{-4}}{1{,}2 \cdot 10^{-5}} \approx 20\,\mathrm{K}$$

III. Ein Bein oder mehrere Beine?

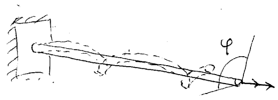
Ein runder, fest eingebetteter Stab (Radius R_1) kann eine Last $F_1 = \dfrac{\pi^2 EI}{4l^2} = \dfrac{\pi^3 E R_1^4}{16 l^2}$ aushalten.



Werden aus dem gleichen Material zwei Stäbe mit dem gleichen Gewicht gemacht, so werden sie Radien $R_2 = R_1 / \sqrt{2}$ haben. Sie können eine Last $F_2 = 2\dfrac{\pi^3 E R_2^4}{16 l^2} = \dfrac{1}{2} F_1$ tragen, die zwei Mal kleiner ist als F_1. Generell gilt: je mehr Beine desto kleiner ist die kritische Last (bzw. desto größer das Gewicht der erforderlichen Konstruktion). Die optimalen Strukturen von Druckstäben sind daher Strukturen mit nur einem kräftigen Druckstab. So sind Pflanzen, Tiere und viele moderne Bauten aufgebaut (eine zentrale tragende Säule, auf der alles aufgehängt wird).

IV. Andere Arten von Instabilitäten

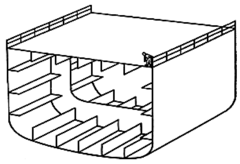
(A) Wird ein Stab verdreht, so wird die gerade Lage seiner Achse instabil und



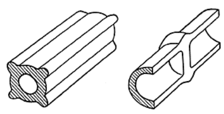
biegt sich zu einer Schraubenlinie sobald der Drehwinkel größer wird als $\varphi_{\max} = \dfrac{9EI}{GI_p}$. Für einen runden Stab gilt $\varphi_{\max} = 9(1+\nu)$. Ein metallischer Draht wird daher bei $\varphi \approx 12$ instabil werden (ca. zwei volle Umdrehungen).

(B) Um maximale Stabilität einer Säule zu erzielen, sollte sie einen möglichst großen Radius (bei entsprechend dünner Wand) haben.

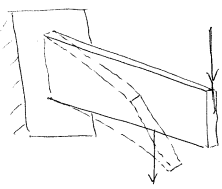
Allerdings wird ein solcher dünnwandiger Zylinder "lokal instabil" wenn die Spannung in der Wand den Wert $\sigma = Et / 4R$ erreicht, wobei t Dicke der Wand ist. Um diese Art der Instabilität zu vermeiden, werden Wände wie auf dem Bild rechts verstärkt (wird im Schiffsbau, Flugzeugbau usw. benutzt).



Auch Pflanzen verstärken die Wände auf eine der nebenstehend gezeigten Arten.



(C) Soll eine Struktur nur vertikale Lasten tragen, so soll ein optimaler Querschnitt möglichst große Höhe und kleine Breite haben. Der Träger wird aber instabil und

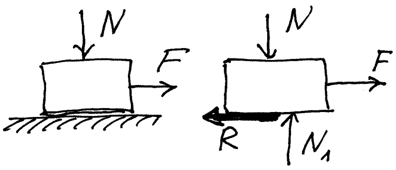


verdreht sich bei $F_{kr} \approx \dfrac{2bh^3 E}{l^2\sqrt{1+\nu}} \approx \dfrac{1{,}7bh^3 E}{l^2}$.

(D) Eine weitere Methode zur Vermeidung von Instabilitäten: Druckkräfte vermeiden (Speichen).

I. Haftreibung und Gleitreibung

In dieser Vorlesung untersuchen wir nur die *trockene* oder *Coulombsche* Reibung zwischen festen Körpern. Durch sehr ausführliche experimentelle Untersuchungen hat Coulomb (1736-1806) festgestellt, dass die Reibungskraft R zwischen zwei Körpern, die mit der Normalkraft N aneinander gedrückt sind, in erster, grober Näherung folgende einfache Eigenschaften hat:



A) Die **Haftreibung** (auch *statische Reibungskraft*) R_s, die zu überwinden ist, um den Körper in Bewegung zu setzen, ist proportional zur Anpresskraft N:

$$\boxed{R_s = \mu_s N}.$$

Der Koeffizient μ_s heißt *statischer Reibungskoeffizient.* Er hängt von der Materialpaarung ab, weist aber dagegen fast keine Abhängigkeit von der Kontaktfläche und Rauhigkeit der Oberflächen auf. Bereits Coulomb hat festgestellt, dass μ_s mit der Standzeit wächst. Dies wird aber in den meisten einfacheren Anwendungen vernachlässigt.

B) Die **Gleitreibung** (auch *kinetische Reibungskraft*) R_k ist die Widerstandskraft, die *nach* dem Überwinden der Haftung wirkt. Coulomb hat experimentell folgende Eigenschaften der Gleitreibungskraft festgestellt:

- Sie ist proportional zur Anpresskraft N

$$\boxed{R_k = \mu_k N}$$

- Sie weist keine wesentliche Abhängigkeit von der Kontaktfläche und Rauhigkeit der Oberflächen

- Der kinetische Reibungskoeffizient ist näherungsweise gleich dem statischen Reibungskoeffizienten:

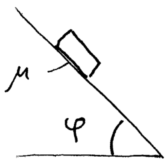
$\mu_k \approx \mu_s$

- Die Gleitreibung hängt nicht (bzw. nur sehr schwach) von der Gleitgeschwindigkeit ab. Oft wird angenommen, dass μ_k mit der Geschwindigkeit schwach abnimmt. Das gilt aber nicht immer, (z.B. nicht bei Gummireifen für kleine Gleitgeschwindigkeiten).

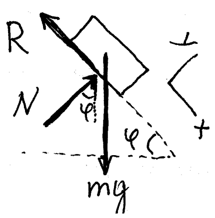
Anders als oft behauptet, haben die statischen und kinetischen Reibungskräfte die gleiche physikalische Herkunft und können in vielen mechanischen Aufgaben nicht getrennt voneinander betrachtet werden. Auch der Unterschied zwischen dem statischen und kinetischen Reibungskoeffizienten erweist sich als relativ, da oft entweder der Übergang vom statischen zum Gleitkontakt kontinuierlich stattfindet (das ist der Fall im angetriebenen Rad[1]) oder die "Haftreibung" sich in Wirklichkeit als Gleitreibung bei sehr kleinen Geschwindigkeiten entpuppt (das ist der Fall bei Gummireibung, z.B. Gummireifen auf der Straße[1]).

II. Reibungswinkel

B1. Auf einer geneigten Ebene liegt ein Klotz (Haftreibungskoeffizient zwischen beiden sei μ_s). Wie groß darf der Neigungswinkel werden, damit der Klotz nicht rutscht?



Lösung: Bei maximalem Neigungswinkel wird die Reibungskraft ihren maximalen Wert $R = \mu_s N$ erreichen. Das Kräftegleichgewicht in diesem kritischen Zustand (im gezeigten Koordinatensystem) lautet wie folgt:



x: $mg\sin\varphi - \mu_s N = 0$

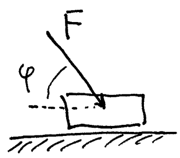
y: $N - mg\cos\varphi = 0$.

Daraus folgt

$$\boxed{\tan\varphi = \mu_s}$$

Der Tangens des "Rutschwinkels" ist gleich dem statischen Reibungskoeffizienten. Dieser Winkel heißt "Reibungswinkel".

B2. Unter welchem kleinsten Winkel muß die Kraft F gerichtet sein, damit der Klotz nicht rutscht?

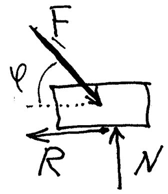


Lösung: Es ist leicht zu verstehen, dass diese Aufgabe äquivalent zu der vorigen ist, nur muss man φ durch

[1] Diese komplizierten physikalischen Zusammenhänge können aber erst durch eine aufwendige Betrachtung der Kontaktmechanik eines angetriebenen Rades aufgedeckt werden. Hierfür ist das Modul "Kontaktmechanik und Reibungsphysik" empfohlen (jedes WS) .

$\pi/2-\varphi$ ersetzen. Die Antwort ist also:

$$\cot\varphi = \mu_s .$$



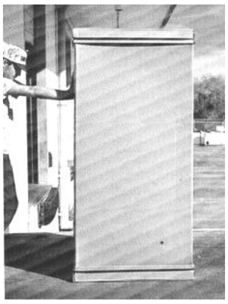
Selbstverständlich kann man dieses Ergebnis aus dem Kräftegleichgewicht noch einmal herleiten:

y: $N - F\sin\varphi = 0$

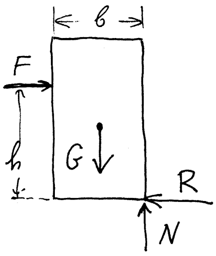
x: $F\cos\varphi - \mu_s N = 0$.

Daraus folg die obige Gleichung.

B3. Kippende Kiste



Drückt man auf eine Kiste seitlich, so tritt bei tief gelegenen Berührungspunkt Gleiten ein, bei hoch gelegenem dagegen Kippen. Aus der Grenzhöhe zwischen Gleiten und Kippen läßt sich der Reibungswinkel ebenfalls bestimmen.



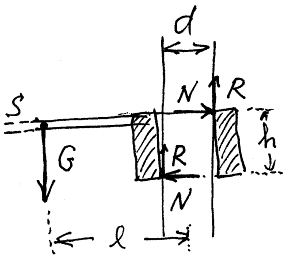
Im Grenzfall setzen Gleiten und Kippen gleichzeitig ein, d.h. die Bodenreaktion wirkt an der rechten Bodenkante und die Reibungskraft erreicht dabei ihren Maximalwert $R = \mu_s N$.

Aus dem Kräfte- und Momentengleichgewicht folgt dann:

$N = G$, $F = \mu_s N = \mu_s G$, $-Fh + Gb/2 = 0$;

$$h = \frac{Gb}{2F} = \frac{b}{2\mu_s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{b}{2h} = \mu_s}.$$

III. Selbstsperrung

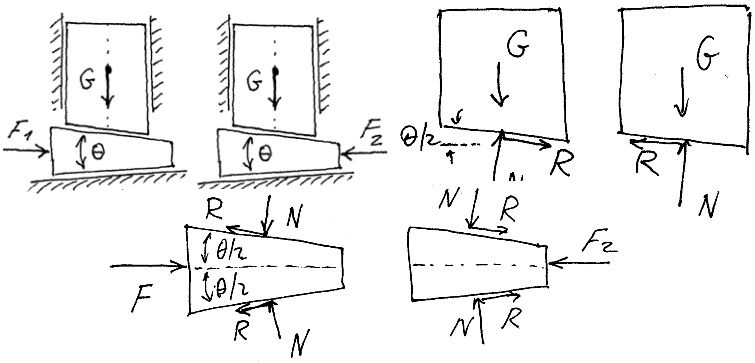


An einer auf einer senkrechten Stange verschiebbaren Führungsbuchse ist ein Arm befestigt, an dem ein Gewicht verschiebbar angeordnet ist. Solange sich das Gewicht weit genug außen befindet, wird es durch die Reibungskräfte, die in den Eckpunkten der Führungsbuchse auftreten, gehalten (Selbstsperrung).

Aus dem Kräftegleichgewicht in horizontaler Richtung folgt, dass beide Reaktionskräfte N in Eckpunkten betragsmäßig gleich sind (so sind sie im Bild eingezeichnet). An der Grenze zwischen Gleiten und Selbstsperrung erreicht die Reibungskraft R seinen maximalen Wert $R = \mu_s N$.

Aus dem Kräftegleichgewicht in vertikalen Richtung $2\mu_s N - G = 0$ und Momentengleichgewicht bezüglich des Zentrums der Buchse $Gl - 2N\frac{h}{2} + 2\mu_s N\frac{d}{2} = 0$ folgt für die kritische Länge l_c: $\boxed{l_s = \frac{h}{2\mu_s} - \frac{d}{2}}$.

IV. Keil rein, Keil raus



Aus dem Gleichgewicht in vertikaler Richtung für den anzuhebenden Körper gilt $G = N\cos\theta/2 - \mu_s N\sin\theta/2$. Daraus folgt $N = \dfrac{G}{\cos\theta/2 - \mu_s\sin\theta/2}$. Aus dem Gleichgewicht für den Keil in horizontaler Richtung folgt dann $F_1 = 2N\sin\theta/2 + 2\mu_s N\cos\theta/2$ oder $F_1 = 2G\dfrac{\sin\theta/2 + \mu_s\cos\theta/2}{\cos\theta/2 - \mu_s\sin\theta/2}$.

Beim Rausholen des Keils erhalten wir

$$G = N\cos\theta/2 + \mu_s N\sin\theta/2$$

$$N = \frac{G}{\cos\theta/2 + \mu_s\sin\theta/2}$$

$$F_2 = 2G\frac{-\sin\theta/2 + \mu_s\cos\theta/2}{\cos\theta/2 + \mu_s\sin\theta/2}$$

Die beiden Kräfte stehen im Verhältnis

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{-\sin\theta/2 + \mu_s\cos\theta/2}{\cos\theta/2 + \mu_s\sin\theta/2}\,\frac{\cos\theta/2 - \mu_s\sin\theta/2}{\sin\theta/2 + \mu_s\cos\theta/2}.$$

Für kleine θ gilt: $\dfrac{F_2}{F_1} = 1 - \left(\mu_s + \dfrac{1}{\mu_s}\right)\theta$.

Festigkeitshypothesen

Literatur: ***Hauger, Schnell und Groß.*** **Technische Mechanik 2 (Elastostatik), 3.3.**

I. Allgemeine Überlegungen zu den Festigkeitshypothesen.

Bei einem "einfachen Spannungszustand", (z.B. bei einer einachsigen Dehnung eines Stabes) kann man durch Experimente feststellen, bei welcher kritischen Spannung der Stab "versagt" (z.B. sich plastisch deformiert oder bricht). Die zulässige Spannung soll kleiner sein als diese kritische Spannung $\sigma < \sigma_c$. Ähnliche kritische Spannungen kann man auch bei anderen "einfachen Spannungszuständen" ermitteln, z.B. die kritische Schubspannung τ_c: Damit der Stab bei einer Schubbeanspruchung im elastischen Zustand bleibt, muss die Bedingung $\tau < \tau_c$ erfüllt sein. Haben wir es mit einem komplexen Spannungszustand zu tun (z.B. wirken gleichzeitig eine axiale Kraft und ein Torsionsmoment), so stellt sich die Frage, wann der Stab unter dieser komplexen Beanspruchung versagt.

Eine einfache Zusammensetzung der Bedingungen $\sigma < \sigma_c$, $\tau < \tau_c$ wäre dabei falsch! Davon kann man sich am einfachsten durch die folgenden Überlegungen überzeugen: Die Spannungskomponenten sind bezüglich der Rotationen nicht invariant. Es kann sein, dass in einem Koordinatensystem beide Gleichungen erfüllt sind und im anderen eine erfüllt und die andere nicht erfüllt. Das würde bedeuten, dass bezüglich eines Koordinatensystems das Medium noch im elastischen Zustand ist und im anderen schon im plastischen. Das kann aber nicht sein. Die Aussage, ob der Körper immer noch elastisch oder bereits plastisch deformiert wird, ist eine absolute Aussage, die von der Wahl des Koordinatensystems nicht abhängen darf. Der Körper ist entweder im elastischen oder im plastischen Zustand, egal ob wir auf ihn von oben, von unter oder irgendwie schräg sehen. Das bedeutet, dass es ein Kriterium für den Beginn der plastischen Deformation ist, dass es nur Spannungskomponenten in solchen Kombinationen enthalten kann, die invariant bezüglich der Achsenrotationen sind. Es gibt aber nur drei unabhängigen Invarianten des Spannungstensors. Als diese können z.B. die drei Hauptspannungen gewählt werden oder die Invarianten I_1, I_2, I_3 (Spur, Summe der Quadraten aller Komponenten und die Determinante).

Ein Kriterium für das Einsetzen der plastischen Deformation oder des Bruches muss mit Hilfe dieser Invarianten formuliert werden. Die drei Invarianten bestimmen den Spannungszustand eindeutig. Das bedeutet, dass zwei verschiedene Spannungszustände, mit zwei verschiedenen Spannungstensoren, die aber die gleichen drei Invarianten besitzen, in Wirklichkeit die gleichen Spannungszustände sind. Man kann zeigen, dass die drei Hauptspannungen sich durch die drei Invarianten ausdrücken lassen. Wenn Sie zwei verschiedene Spannungszustände haben bei denen alle drei Invarianten gleich sind, so sind auch die drei Hauptspannungen gleich. Das heißt, Sie haben zwei gleich beanspruchte Gebiete, die nur räumlich verschieden orientiert sind. Aber in einem isotropen Medium kann die Festigkeit nicht von der Orientierung des Spannungszustandes abhängen. Wenn wir gleich stark ziehen, dann ist es egal in welche Richtung.

Das ist natürlich nur für isotrope Medien richtig. Dies sind aber viele klassische Werkstoffe, wie Mauerwerk oder noch besser polykristalline metallische Werkstoffe. Haben Sie ein Faserverbund, so hängt seine Festigkeit natürlich sehr wesentlich davon ab, ob in Richtung der Faser oder senkrecht dazu gezogen wird. Wir reden also jetzt nicht von den modernen Werkstoffen solcher Art wie Faserverbunde oder Laminate, bei denen alles noch komplizierter ist, sondern nur von klassischen isotropen Werkstoffen, wie Stahl, Aluminium und ähnliches.

II. Die wichtigsten Festigkeitshypothesen

1. Normalspannungshypothese

Hier wird angenommen, dass für die Materialbeanspruchung die größte Normalspannung maßgeblich ist. Diese wird durch die größte der drei Hauptspannungen gegeben.

Beispiele: Bei einem einachsigen Zug ist die maximale Hauptspannung einfach gleich der Zugspannung σ_{Zug}. Wenn diese den kritischen Wert σ_c erreicht, versagt das Bauteil. Wird dasselbe Material mit der Spannung τ *auf Schub* belastet, so sind die Hauptspannungen gleich $\pm\tau$. das Bauteil versagt beim Überschreiten des kritischen Wertes $\tau = \sigma_c$.

2. Schubspannungshypothese

Dieser Hypothese liegt die Annahme zugrunde, dass die Materialbeanspruchung durch die maximale Schubspannung charakterisiert werden kann. Das Material versagt, wenn die größte Schubspannung den kritischen Wert τ_c überschreitet.

Beispiele: Bei Beanspruchung auf Schub lautet das Versagenskriterium $\tau = \tau_c$. Bei einer einachsigen Dehnung mit der Zugspannung σ ist die maximale Schubspannung gleich $\tau_{\max} = \frac{1}{2}\sigma$ und das Material versagt, wenn die Zugspannung den Wert $2\tau_c$ übersteigt.

3. von Mises-Kriterium

Vorüberlegungen

Durch physikalische Überlegungen kann man meistens feststellen, dass nicht alle drei Invarianten die gleiche Rolle spielen. Was ist z.B. die erste Invariante des Spannungstensors? Es ist immer möglich, die Koordinatenachsen so zu drehen, dass alle drei Diagonalkomponenten des Spannungstensors gleich sind und der Spannungszustand somit in eine Superposition aus einem hydrostatischen Druck und einer reinen Scherung zerlegt werden kann. Nun ist es ziemlich einfach zu verstehen, dass der hydrostatische Druck und die Schubspannung völlig verschiedene Wirkung in Bezug auf die Festigkeit haben. Den hydrostatischen Druck können alle Körper sehr gut und unendlich lange aushalten. Selbst solche fließende Medien wie Flüssigkeiten oder Gase halten einen allseitigen Druck sehr gut aus. Legen Sie dagegen eine auch sehr kleine Schubspannung an, so beginnen sie zu fließen.

Wir reden jetzt von zähen Werkstoffen, wie Stahl, Kupfer oder Aluminium. Für diese Materialien ist es ziemlich egal, ob der hydrostatische Druck da ist oder nicht. Versuchen wir, diese Erkenntnis mathematisch auszudrücken.

Nehmen wir an, wir haben einen beliebigen Spannungszustand. Wir können die Achsen so drehen, dass wir diesen Zustand als eine Superposition eines hydrostatischen Drucks und einer Scherung darstellen. Den hydrostatischen Druck ziehen wir ab, da er keine Rolle spielt. Unsere Behauptung ist also, dass der Deviationstensor im Sinne der Festigkeit dem ursprünglichen Tensor äquivalent ist. Welche Invarianten des Spannungstensors gibt es nun? Die erste Invariante (Spur) ist jetzt Null, die haben wir angezogen. Die zweite Invariante ist die Summe aller Quadrate, die dritte Invariante ist die Determinante. Es gibt viele Spannungszustände, für die die dritte Invariante gleich Null ist. Ist eine der (Hauptschub-komponenten gleich Null, so ist die dritte Invariante identisch Null, egal wie groß die anderen Komponenten sind. Die zweite Invariante aber wohl nicht. Im Fall, wenn beide Invarianten nicht Null sind, gibt es keine theoretischen Gründe, warum nur eine der beiden eine wichtigere Rolle spielen soll. Man nimmt aber meistens an, dass die dritte Invariante keine Rolle spielt. Wenn wir das annehmen, lautet das Festigkeitskriterium: $I_2<I^*$. In dem Fall, für den nur zwei der Komponenten nicht Null sind, ist das ein exaktes Kriterium und uns bleibt nur zu hoffen, dass dies auch für andere Fälle eine brauchbare Interpolationsformel darstellt. Beim von Mises-Kriterium nimmt man also an, dass der hydrostatische Druck keinen Einfluss auf die Festigkeit des Materials hat. Vom Spannungstensor kann daher der hydrostatische Anteil abgezogen werden:

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sigma_x - \frac{1}{3}\sigma_y - \frac{1}{3}\sigma_z & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \frac{2}{3}\sigma_y - \frac{1}{3}\sigma_x - \frac{1}{3}\sigma_z & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \frac{2}{3}\sigma_z - \frac{1}{3}\sigma_x - \frac{1}{3}\sigma_y \end{pmatrix}$$

Die quadratische Invariante dieses Tensors ist

$$\begin{aligned} I_2 &= \left(\tfrac{2}{3}\sigma_x - \tfrac{1}{3}\sigma_y - \tfrac{1}{3}\sigma_z\right)^2 + \left(\tfrac{2}{3}\sigma_y - \tfrac{1}{3}\sigma_x - \tfrac{1}{3}\sigma_z\right)^2 \\ &\quad + \left(\tfrac{2}{3}\sigma_z - \tfrac{1}{3}\sigma_x - \tfrac{1}{3}\sigma_y\right)^2 + 2\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xz}^2 + 2\tau_{yz}^2 \\ &= 2\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xz}^2 + 2\tau_{yz}^2 \\ &\quad + \tfrac{2}{3}\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_z - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z\right) \end{aligned}$$

Ist die kritische Spannung bei einem einfachen Zugexperiment gleich σ_c, so bedeutet das, dass der kritische Wert der zweiten Invariante ist gleich $I_{2,c} = \frac{2}{3}\sigma_c^2$. Bei einem reinen Schub würde das Material bei der kritischen Spannung versagen, die der Bedingung $2\tau_c^2 = I_c = \frac{2}{3}\sigma_c^2$ genügt. Daraus folgt $\tau_c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sigma_c$. Das von-Mises-Kriterium ist

$$\sqrt{3\tau_{xy}^2 + 3\tau_{xz}^2 + 3\tau_{yz}^2 + \left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_z - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z\right)} = \sigma_c$$

Kontaktmechanik mit der Methode der Dimensionsreduktion (MDR) I.

Literatur: V.L. Popov & M. Heß, Method of Dimensionality reduction in contact mechanics and friction: A users handbook. I. Axially-symmetric contacts, Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering, 2014, v. 12, N.1, pp.1-14. http://casopisi.junis.ni.ac.rs/index.php/FUMechEng/article/view/155/47 (open access)

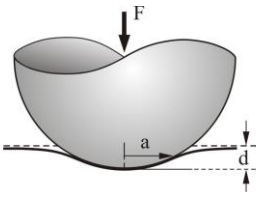
I. Liste von Bezeichnungen:

E Elastizitätsmodul, G Schubmodul
ν Querkontraktionszahl
$E^* = E/(1-\nu^2)$ effektiver Elastizitätsmodul
$G^* = 4G/(2-\nu)$ effektiver Schubmodul
F oder F_N Normalkraft
a Kontaktradius, d Eindrücktiefe
$f(r)$ dreidimensionales Profil
$g(x)$ 1D, MDR-transformiertes Profil
$p(r)$ Druckverteilung im Kontaktgebiet
$q(x)$ Streckenlast im äquivalenten Modell
$f'(r)$, $q'(x)$ Ableitungen nach dem jeweiligen Argument
Δx Abstand zwischen Federn
c differenzielle Kontaktsteifigkeit

II. Kontakt elastischer Körper.

Kontakte treten in unzähligen Anwendungen, wie Kupplungen, Bremsen, Reifen, Gleit- und Kugellager. Kontakte können zur Übertragung von mechanischen Kräften (Schrauben), elektrischem Strom oder Wärme dienen bzw. einen Materialstrom verhindern (Dichtungen).

III. Kontaktgrößen vom Interesse.



Wird ein starrer Körper in einen ausgedehnten elastischen Körper mit ebener Oberfläche ("elastischer Halbraum") mit einer Kraft F eingedrückt, so sinkt er um den Betrag d (*Eindrücktiefe*) unter die ursprüngliche Oberfläche des elastischen Körpers. Dabei bildet sich ein Gebiet mit dem Radius a (Kontaktradius). Innerhalb des Kontaktgebietes herrscht bestimmte Spannungsverteilung $p(r)$, wobei r der polare Radius in der Kontaktfläche ist. Die Beziehungen zwischen den Größen F, d, a sowie die resultierende Spannungsverteilung sind die wichtigsten Größen welche Kontakteigenschaften bestimmen.

Kontaktsteifigkeit: Die Beziehung $F(d)$ definiert den Kontakt als eine "nichtlineare Feder". Wird die Eindrücktiefe um einen kleinen Wert Δd geändert, so ändert sich auch die Eindrückkraft um $\Delta F = F(d+\Delta d) - F(d)$. Das Verhältnis $c = (\Delta F/\Delta d)$ wird die *differentielle Steifigkeit* des Kontaktes genannt. Sie bestimmt die Dynamik des Systems mit der Kontaktstelle (z.B. Dynamik eines Schienenfahrzeugs). In der Kontaktmechanik wird gezeigt, dass die differentielle Steifigkeit ausschließlich durch den Durchmesser $2a$ des Kontaktgebietes bestimmt wird:

$$c = 2aE^* . \tag{1}$$

Elektrische Leitfähigkeit: Werden zwei elektrisch leitende Körper in Kontakt mit Radius a gebracht, so ist der *elektrische Widerstand* des Kontaktes, $\tilde{R}$, gleich

$$\tilde{R} = (\rho_1 + \rho_2)/(4a), \tag{2}$$

worin ρ_1 und ρ_2 die spezifischen Widerstände der beiden Körper bezeichnen.

Wärmeleitfähigkeit: Werden zwei Körper mit einer Temperaturdifferenz ΔT in Kontakt gebracht, so entsteht ein Wärmestrom ΔQ (Einheit J/s) vom wärmeren zum kälteren Körper hin. Der Proportionalitätskoeffizient zwischen beiden nennt man den *Wärmewiderstand* $R_{th} = \Delta T/\Delta Q$. Auch der Wärmewiderstand wird allein durch den Kontaktradius bestimmt:

$$R_{th} = 1/(4a\lambda^*) \tag{3}$$

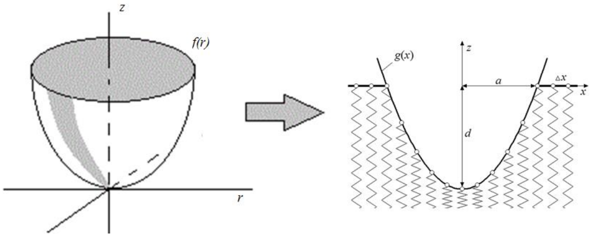
mit $1/\lambda^* = 1/\lambda_1 + 1/\lambda_2$. Darin bezeichnen λ_1 und λ_2 die spezifischen Wärmeleitfähigkeiten der beiden Körper.
Alle drei o.g. Größen hängen von dem Kontaktradius a ab.

IV. Methode der Dimensionsreduktion.

Fragestellung: Ein starres rotationssymmetrisches Profil $z = f(r)$ sei in einen elastischen Körper mit der Normalkraft F_N um eine Tiefe d eingedrückt; der Kontaktradius sei a. Gesucht wird der Zusammenhang zwischen F_N, d und a sowie die Spannungsverteilung im Kontakt.

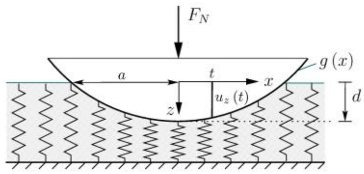
Lösungsschritte der MDR:
(1) Man definiert ein „MDR-transformiertes" eindimensionales Profil

$$g(x)=|x|\int_0^{|x|}\frac{f'(r)}{\sqrt{x^2-r^2}}\,\mathrm{d}r\ . \qquad (4)$$



(2) Anstelle des elastischen Halbraums wird eine lineare Reihe von unabhängigen Federn definiert, die sogenannte „Winklersche Bettung“, mit einem kleinen Abstand Δx und Normalsteifigkeit $k_z = E^*\Delta x$ und Tangentialsteifigkeit $k_x = G^*\Delta x$.

(3) Das eindimensionale Profil wird nun mit der Normalkraft F_N in die elastische Bettung eingedrückt.



V. Berechnungsschritte der MDR.

Vertikale Verschiebung einer Feder an der Stelle x innerhalb des Kontaktgebietes ist gleich $u_z(x)=d-g(x)$. Am Rand des Kontaktes $x=a$ wird sie Null: $u_z(a)=0$

$$\Rightarrow \boxed{d=g(a)}. \qquad (5)$$

Die entsprechende Federkraft ist gleich Verschiebung mal Steifigkeit:

$$\Delta F_z(x)=\Delta k_z u_z(x)=E^* u_z(x)\Delta x\ .$$

Die Summe aller einzelnen Federkräfte ergibt die Normalkraft:

$$\boxed{F_N := E^*\int_{-a}^{a} u_z(x)\,\mathrm{d}x = 2E^*\int_0^a \left[d-g(x)\right]\mathrm{d}x} \quad (6)$$

Definieren wir noch die Streckenlast

$$q_z(x)=\frac{\Delta F_z(x)}{\Delta x}=E^* u_z(x)=E^*\left[d-g(x)\right]. \quad (7)$$

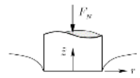
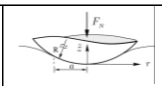
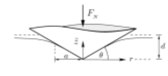
Die Druckverteilung im ursprünglichen 3D-Kontakt bestimmt sich dann laut:

$$\boxed{p(r)=-\frac{1}{\pi}\int_r^{\infty}\frac{q_z'(x)}{\sqrt{x^2-r^2}}\,\mathrm{d}x} \qquad (8)$$

Die Gleichungen (5),(6) und (8) lösen vollständig das Kontaktproblem.

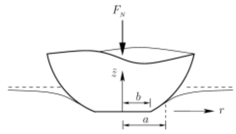
VI. Beispiele für die Profiltransformation

Durch Anwendung der Transformation (4) erhält man für einen *flachen zylindrischen Stempel*, eine *Kugel* und einen *Kegel* die folgenden transformierten Profile:

Tabelle I			
$f(r)$	$\begin{cases}0, & r<a\\ \infty, & r>a\end{cases}$	$r^2/2R$	$r\tan\theta$
$g(x)$	$\begin{cases}0, & x<a\\ \infty, & x>a\end{cases}$	x^2/R	$\frac{\pi}{2}\lvert x\rvert\tan\theta$

Als ein weniger triviales Beispiel betrachten wir den Kontakt eines *parabolischen Profils mit verschlissener Spitze*:

$$f(r)=\begin{cases}0 & \text{für } 0\le r<b\\ \dfrac{r^2-b^2}{2R} & \text{für } b\le r\le a\end{cases}$$

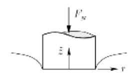
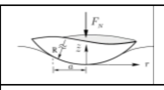
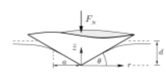


Das MDR-transformierte Profil ist gleich

$$g(x)=\begin{cases}0, & \text{für } 0\le|x|<b\\ \dfrac{|x|}{R}\sqrt{x^2-b^2} & \text{für b}\le|x|<a\end{cases}.$$

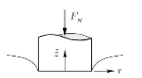
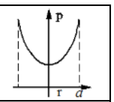
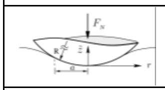
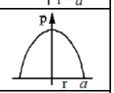
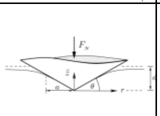
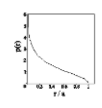
VII. Beispiele für die Berechnung des Kontaktradius und der Normalkraft.

Einsetzen der Profile aus Tabelle I in (5) ergibt den Kontaktradius a als Funktion von d. Weiteres Einsetzen in (6) ergibt die Normalkraft:

Tabelle II			
a	a	$\sqrt{Rd}$	$\frac{2}{\pi}\frac{d}{\tan\theta}$
F_N	$2aE^*d$	$\frac{4}{3}E^*R^{1/2}d^{3/2}$	$\frac{2}{\pi}E^*\frac{d^2}{\tan\theta}$

VIII. Beispiele für Druckverteilungen

Einsetzen der Profile aus der Tabelle I in die Gleichung (7) und diese in (8) ergibt:

	$p(r)=\frac{E^*d}{\pi a}\left(1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)^{-1/2}$	
	$p(r)=\frac{2E^*}{\pi}\left(\frac{d}{R}\right)^{1/2}\sqrt{1-\left(\frac{r}{a}\right)^2}$	
	$p(r)=\frac{E^*}{2}\tan\theta\cdot\ln\left(\frac{a}{r}+\sqrt{\left(\frac{a}{r}\right)^2-1}\right)$	

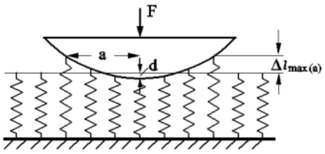
Kontaktmechanik mit der Methode der Dimensionsreduktion (MDR) II.

Literatur: V.L. Popov & M. Heß, Method of Dimensionality reduction in contact mechanics and friction: A users handbook. I. Axially-symmetric contacts, Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering, 2014, v. 12, N.1, pp.1-14.
http://casopisi.junis.ni.ac.rs/index.php/FUMechEng/article/view/155/47 (open access)

I. Adhäsiver Kontakt.

Zwischen beliebigen Körpern gibt es relativ schwache und schnell mit dem Abstand zwischen den Oberflächen abfallende Wechselwirkungskräfte (van der Waals-Kräfte), die zur gegenseitigen Anziehung der Körper führen und als *Adhäsionskräfte* bekannt sind. Sie spielen eine wichtige Rolle in den Anwendungen, wo eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:
(i) Die Oberflächen der Körper sind sehr glatt (wie z.B. die der magnetischen Scheibe von Festplatten)
(ii) Einer der Kontaktpartner besteht aus einem sehr weichen Material (Gummi oder biologische Strukturen) oder
(iii) Es handelt sich um mikroskopische Systeme (mikromechanische Geräte, Atomkraftmikroskope, biologische Strukturen u.ä.).

Anwendung der MDR: Wird das effektive Profil in die effektive Winklersche Bettung zunächst eingedrückt und dann gezogen, so werden die Federn am Rande des Kontaktes abspringen wenn die Auslenkung der Feder den kritischen Wert



$$\boxed{\Delta l_{\max}(a)=\sqrt{\frac{2a\pi\gamma_{12}}{E^*}}} \qquad (1)$$

übersteigt, wobei γ_{12} die Trennungsarbeit pro Flächeneinhalt ist (*Regel von Heß*). Der kritische Kontaktradius im Moment der vollständigen Trennung beider Körper bestimmt sich aus

$$\left.\frac{\mathrm{d}g(a)}{\mathrm{d}a}\right|_{a=a_c}=\sqrt{\frac{9\pi\gamma_{12}}{2a_cE^*}}\,. \qquad (2)$$

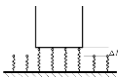
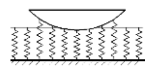
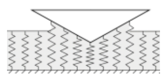
Die dabei wirkende Kraft wird *Adhäsionskraft* genannt. Sie ist gleich

$$F_A=2E^*\left[a_c\Delta\ell_{\max}(a_c)-\int_0^{a_c}xg'(x)\mathrm{d}x\right]. \quad (3)$$

Der Zusammenhang zwischen der Normalkraft, der Eindrücktiefe und dem Kontaktradius entsprechen dabei immer *exakt* denen des ursprünglichen dreidimensionalen Problems. Am einfachsten wird die Adhäsionskraft zwischen einem Zylinder mit dem Radius a und einem elastischen Halbraum berechnet. In diesem Fall ist das Integral in der Gleichung (3) gleich Null und die Adhäsionskraft wird allein durch das erste Glied gegeben: $F_A=2E^*a\Delta\ell_{\max}(a)=\sqrt{8\pi a^3E^*\gamma_{12}}$ (*Kendall, 1970*). Für ein parabolisches Profil $f(r)=r^2/2R$ gilt $g(x)=x^2/R$. Die Gleichung (2) nimmt die Form $\frac{2a_c}{R}=\sqrt{\frac{9\pi\gamma_{12}}{2a_cE^*}}$ an. Für den kritischen Radius folgt $a_c=\left(\frac{9\pi\gamma_{12}R^2}{8E^*}\right)^{1/3}$. Einsetzen in (3) ergibt die Adhäsionskraft

$$F_A=2E^*\left[a_c\sqrt{\frac{2a_c\pi\gamma_{12}}{E^*}}-\frac{2}{3}\frac{a_c^3}{R}\right]=\frac{3}{2}\pi R\gamma_{12}\,.$$

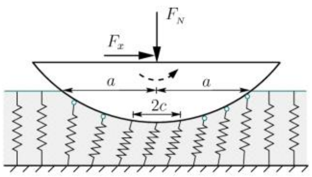
(*Johnson, Kendall, Roberts, 1971*). Berechnungen für andere Profile sind genauso einfach und sind in der unten folgenden Tabelle zusammengefasst.

			
a_c	a	$\left(\frac{9\pi\Delta\gamma R^2}{8E^*}\right)^{1/3}$	$\frac{18\Delta\gamma}{\pi E^*\tan^2\theta}$
F_A	$\sqrt{8\pi a^3E^*\Delta\gamma}$	$\frac{3}{2}\pi\Delta\gamma R$	$\frac{54\Delta\gamma^2}{\pi\tan^3\theta\cdot E^*}$

II. Tangentialkontakt.

Betrachten wir einen axialsymmetrischen Indenter, der zunächst mit einer Normalkraft F_N in den elastischen Halbraum gedrückt und anschließend durch eine Tangentialkraft F_x in x-Richtung beansprucht wird. Bei kleiner Tangentialkraft entsteht am Rande des Kontaktgebietes ein ringförmiges Gleitgebiet, welches sich bei steigender Kraft nach Innen ausbreitet bis das vollständige Gleiten einsetzt. Den Radius des Haftgebietes bezeichnen wir durch c.

Anwendung der MDR: Ein solcher Tangentialkontakt wird innerhalb der MDR wie folgt gelöst: Das modifizierte Profil g wird in die Winklersche Bettung, gekennzeichnet durch



die Steifigkeiten gemäß $k_z = E^* \Delta x$ und $k_x = G^* \Delta x$, mit der Normalkraft F_N eingedrückt und dann tangential um $u_x^{(0)}$ verschoben. Jede Feder haftet am Indenter und verschiebt sich zusammen mit ihm, solange die Tangentialkraft $\Delta F_x = k_x u_x^{(0)}$ kleiner $\mu \Delta F_z$ ist. Nachdem die Haftkraft erreicht ist, beginnt die Feder zu gleiten und die Kraft bleibt konstant und gleich $\mu \Delta F_z$. In einem Tangentialkontakt mit dem Reibungskoeffizienten μ sind die Federn im Haftzustand wenn $|k_x u_x| < \mu k_z u_z$. Der Radius des Haftgebietes bestimmt sich aus der Gleichung $\left|k_x u_x^{(0)}\right| < \mu k_z u_z(c)$.

Unter Berücksichtigung der Gleichung $u_z(x) = d - g(x)$ ergibt sich die bestimmende Gleichung

$$\boxed{G^* u_x^{(0)} = \mu E^* \; d - g(c)}.$$

Die maximale Verschiebung bis zum Beginn des Gleitens erhält man durch Einsetzen $c = 0$ (Verschwinden des Haftgebietes). Sie ist gleich $u_{x,\max} = \mu d \; E^* / G^*$ und wird nur durch die Eindrücktiefe bestimmt (ist also unabhängig von der Form des Indenters).

Die Tangentialverschiebung ist gleich

$$u_x(x) = \begin{cases} u_x^{(0)}, & \text{für } x < c \\ \mu\left(\dfrac{E^*}{G^*}\right)[d - g(x)], & \text{für } c < x < a \end{cases}$$

und die Streckenlast

$$q_x(x) = \begin{cases} G^* u_x^{(0)}, & \text{für } x < c \\ \mu E^* [d - g(x)], & \text{für } c < x < a \end{cases}.$$

Für die Tangentialkraft ergibt sich

$$F_x = 2\int_0^a q_x(x)\,\mathrm{d}x = 2\mu E^* \left[c\left(d - g(c)\right) + \int_c^a \left(d - g(x)\right)\mathrm{d}x \right].$$

Die Normalkraft wird durch die Gleichung

$$F_N = E^* \int_{-a}^{a} u_z(x)\,\mathrm{d}x = 2E^* \int_0^a \left(d - g(x)\right)\mathrm{d}x$$

gegeben und das Verhältnis $F_x / \left(\mu F_N\right)$ durch

$$\boxed{\frac{F_x}{\mu F_N} = \frac{\int_c^a x g'(x)\,\mathrm{d}x}{a g(a) - \int_0^a g(x)\,\mathrm{d}x}}.$$

Beispiele für Tangentialkontakte

1. Zylinder: Kein Gleitgebiet. Das Gleiten beginnt sofort in der gesamten Kontaktfläche.

2. Kugel:

$$u_x^{(0)} = \mu \frac{E^*}{G^*}\left(d - \frac{c^2}{R}\right), \; \frac{F_x}{\mu F_N} = 1 - \left(\frac{c}{a}\right)^3.$$

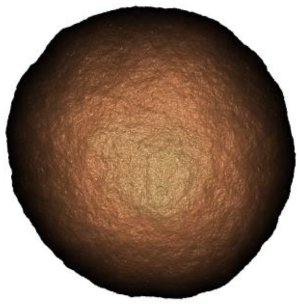
3. Kegel:

$$u_x^{(0)} = \mu \frac{E^*}{G^*}\left(d - \frac{\pi}{2} c \tan\theta\right), \; \frac{F_x}{\mu F_N} = 1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2.$$

4. Potenzprofil $f(r) = b_n r^n$:

$$u_x^{(0)} = \mu \frac{E^*}{G^*} \; d - \kappa_n b_n c^n \;\; , \;\; \frac{F_x}{\mu F_N} = 1 - \left(\frac{c}{a}\right)^n.$$

III. Rauer Kontakt.



Reale Oberflächen sind auf der Mikroskala immer rau. Die Rauheit zeigt oft die Eigenschaft der „Selbstaffinität“ (d.h. sie sieht bei verschiedenen Vergrößerungen ähnlich aus). Die genaue Art der Selbstaffinität wird durch den sogenannten Hurst-Exponenten H charakterisiert. Zur Simulation von rauen Oberflächen kann man folgende Äquivalenzregel benutzen: Ein zylindrischer Stempel mit Durchmesser L und Rauheit, die durch den quadratischen Mittelwert h und den Hurst-Exponenten H charakterisiert wird, kann durch das Profil

$$g(x) = \zeta(H) h \; x / L^{\;H} \qquad (4)$$

repräsentiert werden. Für den mittleren Bereich von Hurst-Exponenten ($0.3 < H < 0.7$) gilt $\zeta(H) \approx 4$. Das bedeutet, dass die raue Oberfläche durch eine einzige Spitze ersetzt wird, die durch ein Potenzgesetz beschrieben wird.