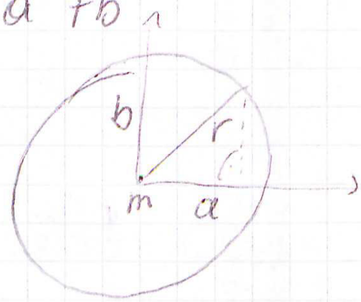
Berührungspunkt zweier bewegter Kreise im $\mathbb{R}^2$

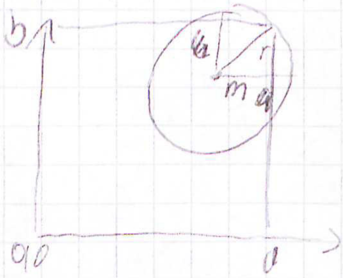
Sei $m = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ der Mittelpunkt eines Kreises.

① Wenn m im Koordinatenursprung ist, dann gilt:

$$r^2 = a^2 + b^2$$



② sonst gilt:



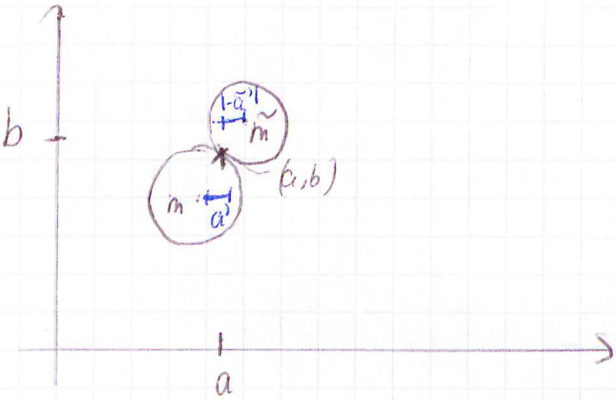
$$r^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2$$

Bewegt sich der Kreis nun geradlinig, lässt sich die Strecke, die der Mittelpunkt m zurücklegt, als Geradengleichung abhängig von Zeit t darstellen:

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ ist dabei der Startpunkt und $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ wie viel Strecke m in 1t zurücklegt.

Jetzt betrachten wir 2 Kreise, welche sich in einem Punkt (a,b).



Wir definieren $a' := (a-x)$. ~~und~~ $\tilde{a} = a$ *(4), da der Treffpunkt für beide Kreise der gleiche ist.

$a' = -\tilde{a}'$ da $\Leftrightarrow (a-x) = -(\tilde{a} - \tilde{x})$

$\Leftrightarrow a - x = -(a \overset{(1)*}{} - \tilde{x})$

$\Leftrightarrow \tilde{x} + x = 2a$

$\Leftrightarrow \dfrac{\tilde{x}+x}{2} = a$

Dazu äquivalent gilt für b:

$b = \dfrac{y + \tilde{y}}{2}$

Wir fassen zusammen:

$x = x_1 + t x_2$

$y = y_1 + t y_2$

$\tilde{x} = \tilde{x}_1 + t \tilde{x}_2$

$\tilde{y} = \tilde{y}_1 + t \tilde{y}_2$

$\Rightarrow a = \dfrac{x_1 + t x_2 + \tilde{x}_1 + t \tilde{x}_2}{2}$

$b = \dfrac{y_1 + t y_2 + \tilde{y}_1 + t \tilde{y}_2}{2}$

Wir hatten am Anfang schon festgehalten, dass $r^2 = a^2 + b^2$.

$$\Leftrightarrow r^2 = \left(\frac{x_1 + tx_2 + \tilde{x}_1 + t\tilde{x}_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1 + ty_2 + \tilde{y}_1 + t\tilde{y}_2}{2}\right)^2$$

$$= t^2 \cdot \left(\frac{x_2^2 + 2x_2\tilde{x}_2 + \tilde{x}_2^2}{4}\right) + t \cdot \left(\frac{\tilde{x}_2\tilde{x}_1 + x_1x_2 + \tilde{x}_2x_1 + x_2\tilde{x}_1}{2}\right)$$

$$+ \left(\frac{x_1^2 + 2x_1\tilde{x}_1 + \tilde{x}_1^2}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow 0 = t^2 \cdot \left(\frac{x_2^2 + 2x_2\tilde{x}_2 + \tilde{x}_2^2}{4}\right) + t \cdot \left(\frac{\tilde{x}_2\tilde{x}_1 + x_1x_2 + \tilde{x}_2x_1 + x_2\tilde{x}_1}{2}\right)$$

$$+ \cancel{t}\left(\frac{x_1^2 + 2x_1\tilde{x}_1 + \tilde{x}_1^2}{4}\right) - r^2$$

Damit lässt sich t ausrechnen (Mitternachts bzw. pq-Formel), welches ~~der Zeitpunkt~~ die Vergangene Zeit bis zum Zusammenstoß gibt.

Der Ort des Zusammenstoßes ist $(a, b) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$.